

# 悬索桥计算分析的弯矩图理论及软件介绍

黄锦源

(上海市城市建设设计研究总院 上海 200125)

**摘要:**本文揭示了悬索桥缆索在垂直荷载作用下,索的几何形状和简支梁弯矩图的对应关系,相对应的悬索桥结构分析计算的弹性理论、挠度理论、有限位移理论而言,这可称为弯矩图理论。由于简支梁的弯矩图计算方便、直观、概念清晰,可大大简化悬索桥结构分析计算,而且是精确的解析解。按弯矩图理论编写了悬索桥的索形计算软件,可以计算空缆线形和吊杆力作用下的成桥线形,并介绍了软件功能及使用方法。  
**关键词:**悬索桥 索形 索长 矢高 索力 简支梁弯矩图 软件介绍

## 1 计算原理

悬索桥缆索计算理论假定索是理想柔性的,只有抗拉刚度,不能抗压,也不能抗弯。在结构理论<sup>[1]</sup>课程中,用力多边形和索多边形图解简支梁的反力和弯矩,已经证明索在受垂直荷载后的索型变化所形成的图形就是简支梁受力后弯矩图。

$n$ 个作用力的叠加弯矩图,就是缆索在该工况力作用下的索形。因此在简支梁的弯矩图中可以取得缆索计算的基本数据(索形、索长、索力……)。

如图1所示在给定缆索上作用均布荷载 $q$ ,集中荷载 $P$ ,可以在相同跨径的简支梁上求得均布荷载 $q$ 的弯矩图 $M_1$ ,集中荷载 $P$ 的弯矩图 $M_2$ 。然后将弯矩图叠加 $M_1+M_2$ 见图1(c),由于给定缆索的长度是已知的,因此调整叠加弯矩图 $M_1+M_2$ 的矢高 $f$ 使索长等于给定索长 $S$ ,调整矢高 $f$ 的过程实际上是改变索的水平力 $H$ ,最后索长等于给定索长 $S$ 时所得矢高 $f$ 和水平力 $H$ 即该缆索实际的受力状态,此时所得的弯矩图外形即缆索的几何图形。

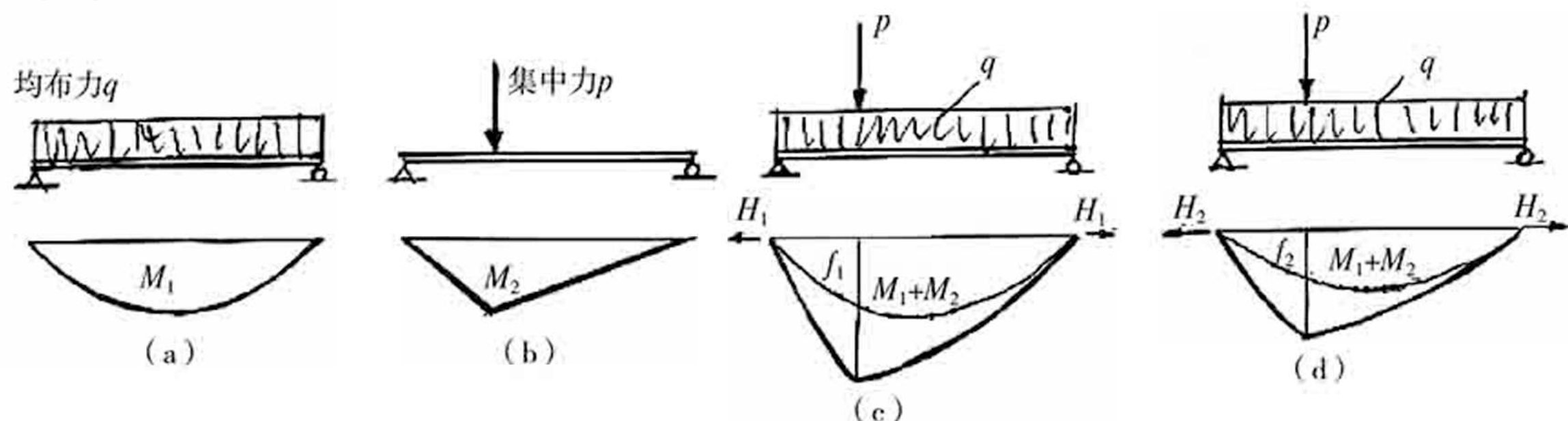


图1 简支梁弯矩图—索形

## 2 计算方法

图1(c)和图1(d)的差别可视为不同索长 $S$ ,矢高 $f$ 和水平力 $H$ 的对应关系,所不变的是弯矩值。同理给定缆索矢高 $f$ ,缆索水平力 $H$ 和索长 $S$ 也就确定了。

图1(c)和图1(d)两个图的坐标关系是相似的、成比例的,比例系数 $k$ 计算如下:

$$k = \frac{f_1}{f_2} = \frac{H_2}{H_1} \quad (1)$$

式中: $f_1, f_2$ 分别表示不同矢高的2个弯矩图对应的水平力 $H_1, H_2$ 。

缆索计算的基本数据可按以下公式计算:

$$\text{水平索力: } H = M_x / f_x \quad (2)$$

式中: $M_x$ 为截面 $x$ 处 $n$ 个作用力工况的叠加弯矩, $f_x$ 为对应截面 $x$ 处缆索垂度,见图2。水平索力 $H$ 沿跨长是不变的常数。

截面 $x$ 处垂直索力:

$$V_x = H \tan \theta_x \quad (3)$$

$$\tan\theta_x = d_m / Hd_x \quad (4)$$

式中： $\theta_x$ 为截面 $x$ 处缆索倾角。见图3。

截面 $x$ 处缆索轴力：

$$P_x = H / \cos\theta_x \quad (5)$$

$$\text{索长：} S = \int_0^s P_x ds = \int_0^s \sqrt{\left(\frac{dm}{H}\right)^2 \times dx^2} \quad (6)$$

式中： $d_m$ 为 $d_x$ 范围内弯矩增量，等步长时 $d_x^2$ 为常数。

求得索长同时可得索长 $S$ 和矢高 $f$ 相关系数 $K$ ，当求得的索长 $S^*$ 与给定的索长 $S$ 不等，可按相关系数 $K$ 修正矢高 $f$ 代入公式(2)求 $H$ ，代入公式(6)再算 $S$ ，使求得的索长 $S^*$ 与给定的索长 $S$ 相等。

$$K = S^* / f \quad (7)$$

$$f = S / K \quad (8)$$

缆索在该索力 $P_x$ 工况下索的拉伸量：

$$\Delta S = \frac{1}{EA} \int_0^s P_x ds = \frac{1}{EA} \int_0^l \sqrt{\left(\frac{dm}{H}\right)^2 \times dx^2} \quad (9)$$

式中： $\Delta S$ 是索从无应力到该工况的总拉伸量。

$EA$ 为缆索材料的形变模量及缆索断面积。

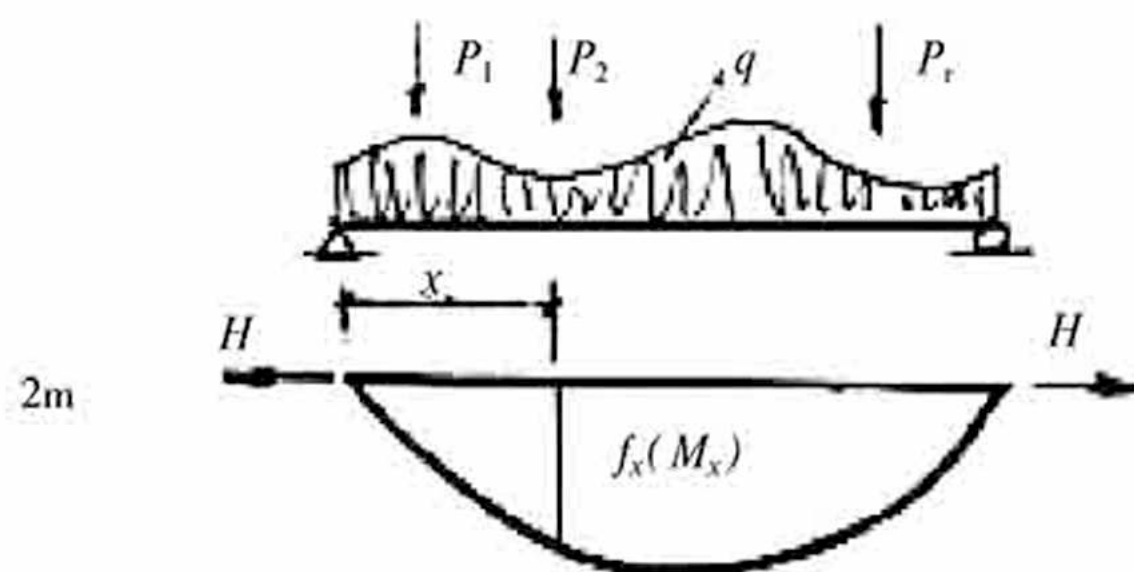


图2 截面 $x$ 处索的垂度

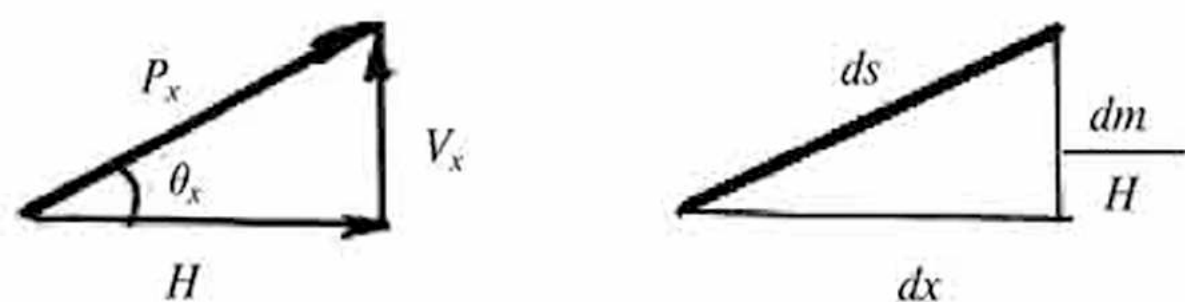


图3 截面 $x$ 处索的倾角

### 3 讨论

在公式(2)中 $M_x$ 为截面 $x$ 处 $n$ 个作用力工况的简支梁叠加弯矩，即

$$M_x = M_1 + M_2 + \dots + M_n \quad (10)$$

$$H = \frac{M_1}{f_x} + \frac{M_2}{f_x} + \dots + \frac{M_n}{f_x} \quad (11)$$

$$= h_1 + h_2 + \dots + h_n$$

比如说缆索从施工状态到成桥状态，其 $i$ 个荷载分项量 $M_i$ 可在总荷载中分离出来，以及计算该荷载分项在总荷载中所占的比重。也可以得到荷载 $M_k$ 在总荷载中所占的比重，也就是所谓的重力刚度的概念。

在每个工况作用下索形跟着变化，因此索自重引起的弯矩需作调整，使索形与对应的工况相符。

施工中为便于吊杆长度的计算和控制，要了解某施工阶段的索形，只要把该阶段的所有荷载，包括施工机具重量一起，计算简支梁的弯矩图，即该施工阶段的索形。

每次工况的计算都是独立的，只要计算后的跨径、索长和矢高与计算假定的相符，结果就是准确的。且弯矩计算只和跨径有关，求索的水平力和索长和矢高有关。索长的变化只和索力与温度有关，式(9)中 $\Delta S$ 是索从无应力到该工况的总拉伸量，温度变化引起的索长变化按 $\alpha tL$ 计算，是指与标准温度相差 $t^\circ\text{C}$ 的索长变化。

这里仅论述缆索在垂直荷载作用下索的几何形状，由于索力的作用引起桥塔的变形、缆索的拉伸、温度变化，从而改变结构跨径、索长和矢高，只要按改变后的跨径再计算一遍简支梁的弯矩，再按改变后的索长计算索的矢高、水平索力和其他参数，这样迭代2次~3次就可得到足够精确的解。

考虑加劲梁的刚度及吊杆的拉伸，调整吊杆的拉力进行迭代，已有许多文献作了介绍。图4所示边缆和独塔悬索桥的计算，原理和算法也基本相同，本文就不展开论述。

### 4 小结

本文揭示了缆索在垂直荷载作用下，索的几何形状和简支梁弯矩图的对应关系，相对悬索桥结构分析计算的弹性理论、挠度理论、有限位移理论而言，这可称为弯矩图理论。由于简支梁的弯矩图计算方便、直观、概念清晰，可大大简化悬索桥结构分析计算，而且是精确的解析解。用此方法校核电算结果同样也是很方便的。

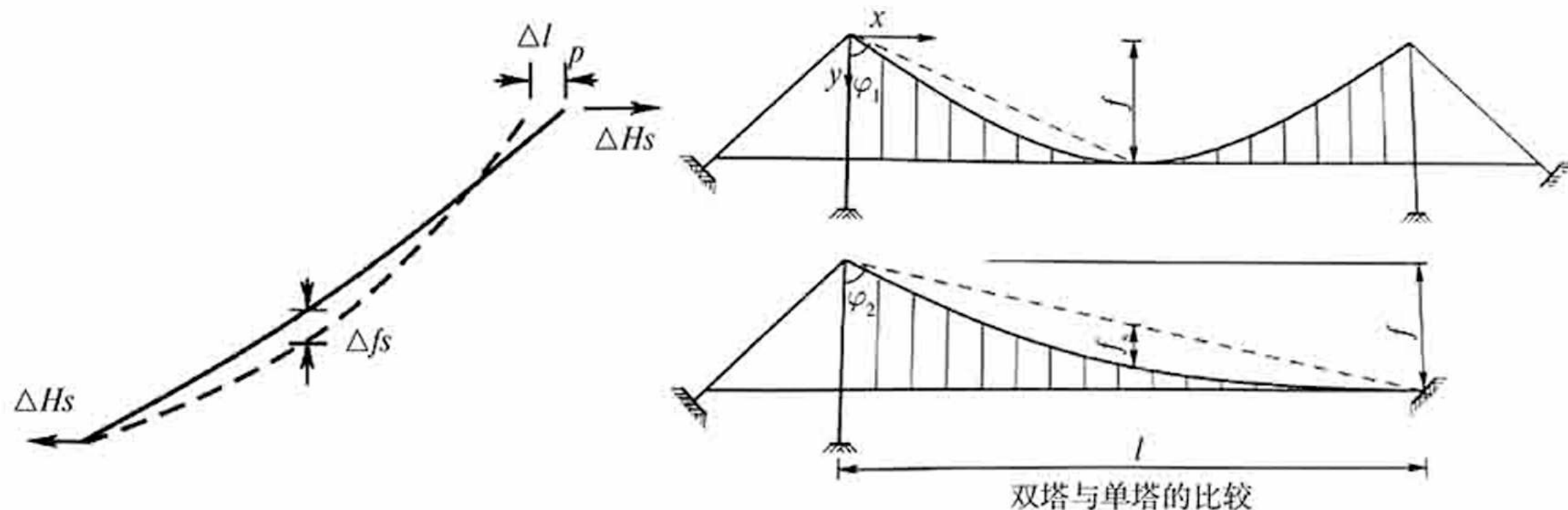


图4 边缆/独塔索的计算

由于缆索上所受荷载的多样性,因此要推导一个主缆线形方程表达式来描述缆索的索形,要么特别复杂,要么引入各种假定而限制了公式使用范围或影响计算精度。而索的几何形状和简支梁弯矩图相对应,用多种荷载作用的简支梁弯矩图求解,更为方便。

根据“悬索桥计算分析的弯矩图理论”,编写了悬索桥的索形计算软件,可以计算空缆线形和吊杆力作用下的成桥线形,以及在施工过程中根据施工加力工况进行缆索的线形控制。软件功能及使用方法介绍如下。

## 5 悬索桥计算步骤

Step1 按跨径、矢高、缆索单位重量、塔高,计算空缆自重线形、索长(含自重伸长量)、索重、索力、水平力、伸长量等。

Step2 加劲梁按连续梁计算恒载支座反力,作为成桥初始吊杆力。

Step3 将加劲梁支座恒载反力(吊杆力)作用于缆索,按给定的索长(含伸长量)计算得:成桥线形、矢高、索重、索力、水平力、伸长量。将桥面纵断面与成桥缆索线形之差设为吊杆长度,并计算吊杆伸长量,确定吊杆长度。

Step4 由塔两侧水平索力之差计算塔的水平位移,改变跨径。由垂直索力计算塔的竖向压缩变形,改变塔高。

Step5 按改变后的跨径、给定索长计算矢高,返到Step3校验塔的变形误差是否允许,确认恒载受力状态。

Step6 按确认后的索形、桥面纵断面,建立悬索桥的有限元模型,计算荷载内力。

自锚式悬索桥和外锚式悬索桥算法是一样的,不同的是自锚式悬索桥加劲梁的刚度比外锚式悬索桥要大得多,因此自锚式悬索桥的矢跨比要大得多。外锚式悬索桥只有用小的矢跨比才能得到足够的刚度。

也可以将成桥缆索线形为准,按成桥矢高求得缆索线形的索长、索力、伸长量及塔的变形,然后按求得的索长反推空缆线形、矢高、索力、伸长量。

## 6 悬索桥的索形计算软件使用方法简介

按“悬索桥计算分析的弯矩图理论”编写的悬索桥的索形计算软件,采用VB语言编写代码,1.0版软件窗口界面如图5所示。



图5 悬索桥计算软件窗口

窗口上部是菜单条，在文件菜单下可进行文件保存、打开及打印操作。上面有2个输入框，右边是计算结果框。左下部是图形区域，将计算的索形、索重、弯矩图显示在图形区域内。还可以用鼠标在图形区域点击，跳出显示索形坐标及索力的对话框。

### 6.1 软件用法

这里以一个三跨自锚式悬索桥为例说明软件的使用法，将该自锚式悬索桥的中跨基本数据先输入第一个框。1. 缆索基本数据：跨径长  $L=248\text{m}$ 、节点数  $n=62$ 、索容重  $\gamma=78.5\text{kN/m}^3$ 、索面积  $A=0.095992\text{m}^2$ 、矢高  $f=48.543\text{m}$ 、弹性模量  $E=1.95 \times 10^8$ 、左塔桩号  $TZ=0+691\text{m}$ 、左塔高  $LH=200.591\text{m}$ 、右塔高  $RH=200.591\text{m}$ ，用选择钮选择依矢高为主或索长为主。输入数据需注意量纲的统一。



图6 输入框1.缆索基本数据

按“确定1”键，计算缆索自重的空缆索形。

从窗口中可看到空缆索形。空缆索形的算法，按索自重沿索长均匀分布及索自重形成的弯矩图与索形相符为条件，进行迭代，以索长判别迭代精度。

同样，输入边跨缆索基本数据，因左、右塔高不同，按“确定1”键后得缆索自重的空缆索形如图7、图8。

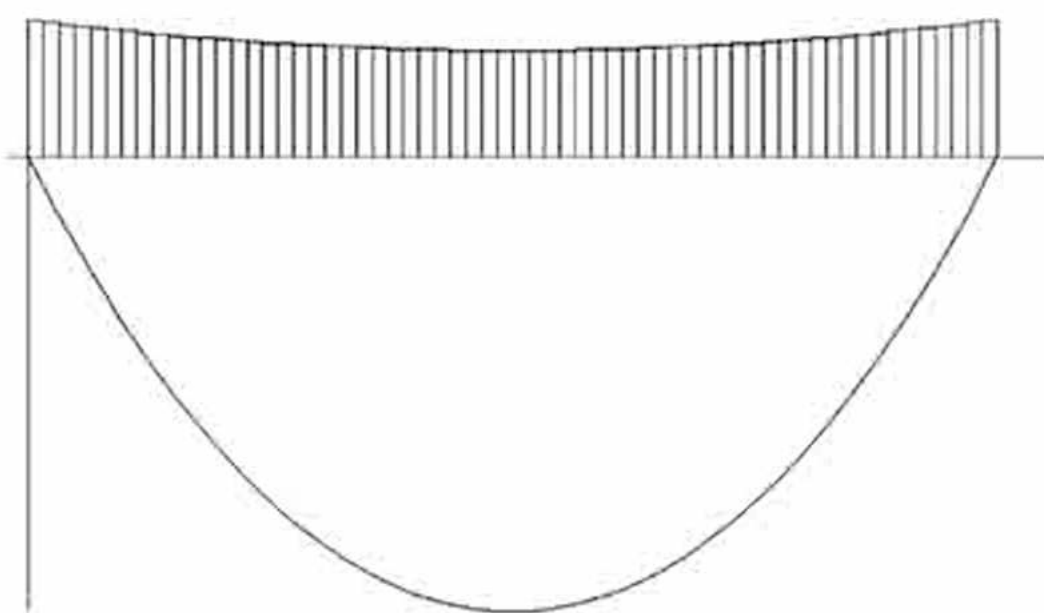


图7 中跨空缆索形

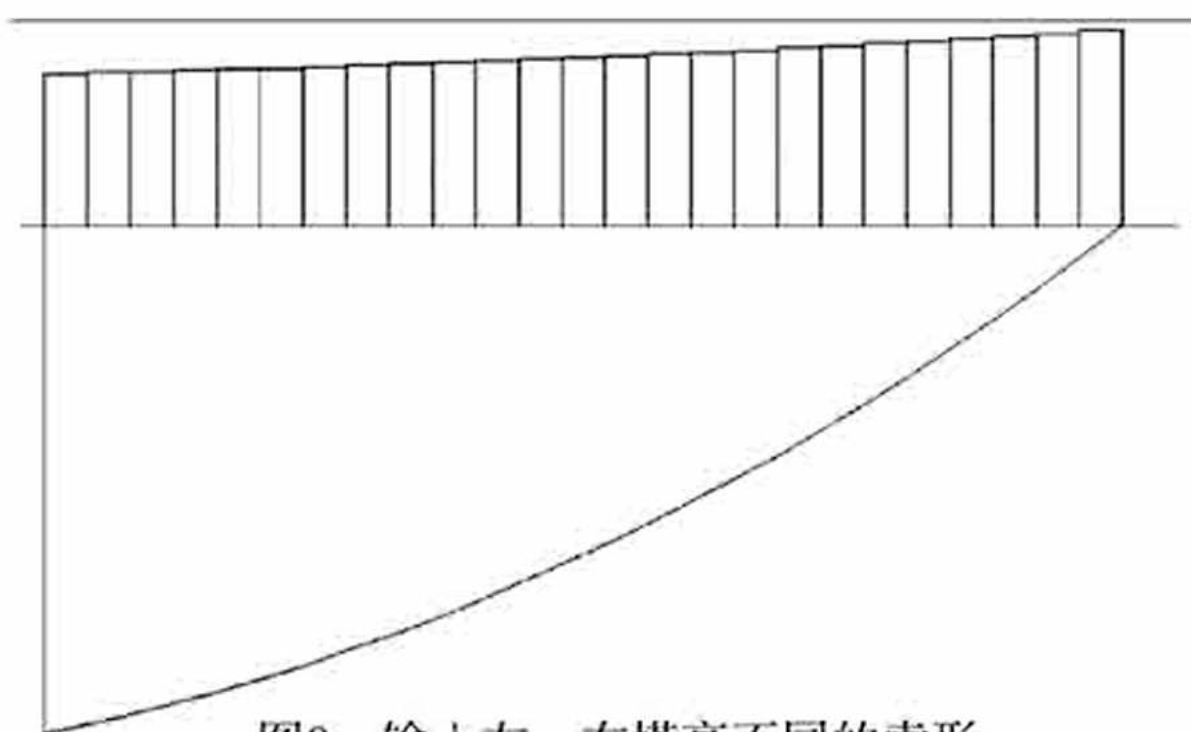


图8 输入左、右塔高不同的索形

将“jg1”文件部分截图如下：

悬索桥计算

工程名称: \_\_\_\_\_ 计算人: \_\_\_\_\_  
 输入数据  
 跨长  $L=248$  节点数 = 62 索容重 = 78.5  
 索面积  $A=0.095992$  矢高  $f=48.543$  弹性模量  $E=1.95E+08$   
 左塔桩号  $Z=691$  左塔高  $LH=200.591$  右塔高  $RH=200.591$

输出数据

空缆线形	序号	桩号	索标高	单位索重	索力
	1	695	197.3767	9.666803	1603.649
	2	699	194.2853	9.523589	1579.891
	3	703	191.3148	9.385915	1557.052
	4	707	188.4637	9.253696	1535.118
	5	711	185.7301	9.126859	1514.076
*****					
	57	919	185.7302	9.00533	1493.916
	58	923	188.4637	9.126861	1514.077
	59	927	191.3148	9.253698	1535.118
	60	931	194.2853	9.385917	1557.052
	61	935	197.3768	9.523592	1579.891
	62	939	200.591	9.666806	1603.649
索长 $L=271.7432$ 水平力 = 1250.061 矢高 = 48.543					
左塔索力 $p1=1603.649$ 右塔索力 $pk=1603.649$ 伸长量 = 2.000932E-02					
左塔垂直反力 $RA=1023.843$ 右塔垂直反力 $RB=1023.843$					

### 6.2 输入基础数据

输入第二个框的2.荷载基本数据：均布荷载输入左节点（左边作用点）、强度（左边强度）、右节点（右边作用点）强度（右边强度）。当输入右节点数值为0时，按集中荷载计算。输入数据需注意量纲的统一（如图9）。



图9 输入框2.荷载基本数据

如选择对称钮计算输入一对荷载；选择单个钮，计算输入一个荷载。按“增加”键计算荷载的组合弯矩图。同样以三跨自锚式悬索桥为例，将中跨吊杆力数据按对称钮输入，每输入一个荷

载,按“增加”键从窗口中可看到一根新的荷载的组合弯矩图(如图10)。

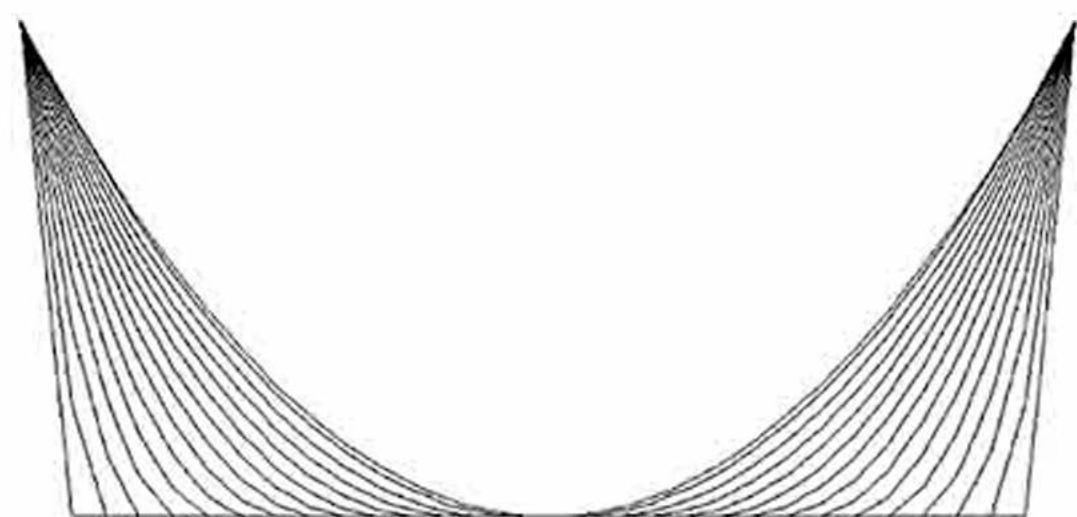


图10 荷载的组合弯矩图

将“jg2”文件部分截图如下:

输入荷载数据

工况号	左力作用点	左力强度	右力作用点	右力强度
1	3	2556	0	0
2	59	2556	0	0
3	5	1993	0	0
4	57	1993	0	0
5	7	2045	0	0

按“确定2”键,计算输入荷载的组合后的成桥索形。从窗口中可看到荷载的组合成桥索形图。成桥索形的算法,按索自重沿索长均匀分布及索自重和荷载组合后形成的弯矩图与索形相符为条件,进行迭代,以索长判别迭代精度。将“jg2”文件部分截图如下:

输出数据

成桥索形序号	桩号	索标高	单位索重	索力
1	695	197.6029	9.405748	51714.77
2	699	194.6185	9.401656	51692.27
3	703	191.6377	9.397568	51669.79
4	707	188.9072	9.123602	50163.47
5	711	186.1803	9.119861	50142.9

空缆线形和荷载(成桥)线形可分别独立计算。悬索的自重是沿索曲线均匀分布的,由于索的垂度因此“jg”文件中单位索重是指沿跨长方向分布的单位索重,应是随索的倾斜角变化的。索形窗口上方可看到悬索的自重荷载指沿跨长方向分布的单位索重的图形。

从几个算例分析结果看,计算误差与节点数关系不大。由矢高为主计算索长误差较小,以索长为主计算矢高误差较大。

## 7 关于悬索桥的三点建议

### 7.1 缆索断面计算方法

缆索断面计算由钢丝束股按正六角形排列,有尖顶形和平顶形2种。

- (1) 钢丝总数 $N$ 计算:  $N=3n(n-1)+1$
- (2) 缆索直径 $D$ 计算:  $D=2d(n-1)+d$
- (3) 缆索断面空隙率为:  

$$\frac{Nd^2}{D^2} = \frac{[3n(n-1)+1]d^2}{[2d(n-1)+d]^2}$$

式中 $n$ 为缆索的钢丝层数,图11中 $n=4$ , $N=37$ 。 $d$ 为钢丝直径, $D$ 为缆索直径。

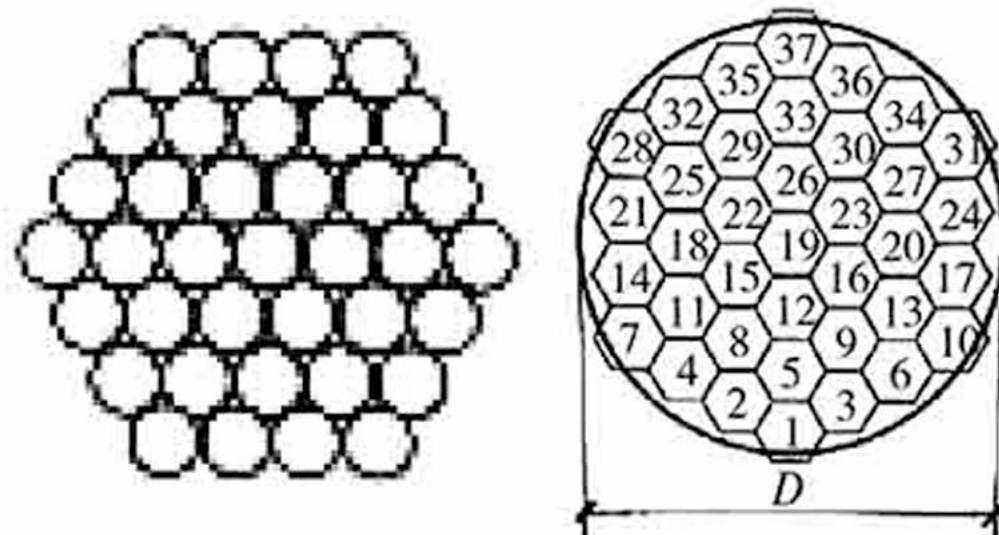


图11 缆索断面

### 7.2 自锚式悬索桥落架步骤

(1) 对称从两边向跨中或从跨中向两边,以吊杆长度控制,进行安装加力,完成一次落架。在安装吊杆的过程中可用本算法及软件进行缆索的线形控制。

(2) 多次均匀加吊杆力,逐次落架。吊杆在加力过程中可用本算法及软件进行缆索的线形控制。

### 7.3 本算法及软件其他适用场合

- (1) 架空索道承载索计算
- (2) 缆索起重机的缆索计算
- (3) 拱桥计算提供合理拱轴线

拱和索的不同在于索不具备抗弯刚度,在荷载作用下,索可改变其形状,形成索多边形与拉力线吻合,使索仅承受拉力。

而拱圈材料其自身有一定的抗弯刚度,当压力线与拱轴线偏离时,拱圈内还存在弯矩。荷载作用下压力线与拱轴线偏离的距离即力臂,力与力臂的乘积即弯矩。为减少弯矩须将压力线与拱轴线重合。可将在荷载作用下形成索形反转成压力线作拱轴线,此时拱在同样荷载作用下只受压不受弯称为合理拱轴线。所以压力线与拉力线是可以相互转换的,拱和索之间力的转换也就是压和拉的转换。

#### 参考文献

- [1] TIMOSHENKO,S.P, YOUN,D.H. 结构理论[M]. 叶红玲,译. 北京:机械工业出版社,2005.