

弦支穹顶结构的形态分析问题 及其实用分析方法

郭佳民 董石麟 袁行飞

(浙江大学 浙江杭州 310027)

摘要:寻找弦支穹顶在零状态下的几何构形与计算时所需施加的初应变值是其形态分析的主要目的。基于零状态下所需求解参数的不同,将其形态分析问题分为:找力、找形、找力+找形三类。这三类问题基本覆盖弦支穹顶结构中所有可能出现的形态分析问题。利用较为成熟的数值分析理论针对找力与找形这两类问题,进行计算公式的推导,并通过找力与找形的组合成功地解决了找力+找形问题,最后给出求解这三类问题的计算流程。按计算流程对同一结构模型分别进行找力与找力+找形分析。计算结果表明:由结构在零状态下施加的初应变值换算而来的内力,经内力重分布后与初始态下内力在数值大小与分布上均有较大差别,所以弦支穹顶结构的找力分析是必需的。结构经找形后在零状态下的单元下料长度与结构在已知几何构形下的单元长度相差甚微,但部分节点坐标值在两个状态下却有较大差别,建议结构在建造时可直接按已知几何构形来进行下料,但应按找形后的计算结果进行放样安装。

关键词:弦支穹顶 形态分析 找力 找形 迭代计算

引言

弦支穹顶是由日本的川口卫等人^[1-2]基于张拉整体结构和单层球面网壳组合而提出的一种新型空间杂交结构。国内外对这一新型空间结构已进行了一些理论与试验研究^[1-6],并应用在实际工程中,如日本的光丘穹顶和前田会社的职工活动中心。在国内已经建成的弦支穹顶有天保国际商务交流中心、天津博物馆贵宾厅和2008年奥运会羽毛球馆等;正在设计、建造的有常州市体育馆、济南奥体中心体育馆等。

形态分析是力的平衡分析的逆过程,包括结构几何稳定性分析以及外形、拓扑分析和状态分析^[7]。形态分析理论是基于柔性张拉结构的设计需要而提出的,是近年来才被重视且正在逐步完善的理论。国内外对索杆张力结构的形态分析研究较多,且较为成熟^[7-8]。由于弦支穹顶其上部单层球面网壳是传统意义上形状确定的结构体系,且为高次超静定结构,在未施加预应力之前已有一定的刚度,所以对其进行的形态分析研究较少。文献^[3]对弦支穹顶的形态分析做了简单的介绍,并给出了弦支穹顶只需进行找力分析而不

必进行找形分析的结论。文献^[4]对结构的找形与找力都进行了研究,并给出了相应的算法。文献^[5-6]也对这一问题进行了研究,并给出了相应的算法。本文紧密结合结构的施工建造过程对这一新型结构的形态分析问题进行了全面地研究,并给出相应的实用计算方法,可为实际的工程设计分析所采用。

1 形态分析问题的分类

在进行问题的分析之前,首先按实际结构的施工与计算过程给出以下几个状态的基本定义^[8]:

(1) 零状态(放样态)A:无自重、无预应力时的状态。在数值模拟过程中,对应为数值模型建立完毕,而未进行计算时的状态。

(2) 初始态B:下部结构张拉完毕后,体系在自重和预应力作用下的平衡状态。在数值模拟过程中,对应为数值模型在考虑自重的情况下计算完毕后的状态。

(3) 荷载态C:体系在初始态的基础上,承受其他外荷载时的受力状态。在数值模拟过程中,对应为数值模型在考虑外荷载的情况下计算完毕后的状态。

各状态(A、B、C)下的几何构形与内力分

本文荣获第四届欧维姆优秀预应力论文三等奖(原载《土木工程学报》2008.No.4)

别用 G 和 F 来表示。针对不同的状态,可以形成以下6个状态参数: G_A 、 F_A 、 G_B 、 F_B 、 G_C 和 F_C 。

严格地按其定义来说,零状态下无任何力存在,所以 F_A 并不存在,但利用现有的计算软件在结构的设计与计算过程中为了得到结构初始态下的预应力,需在零状态的基础上对数值模型施加初应变,而初应变可以换算为内力值,上面定义的 F_A 就是由所需施加的初应变换算而来的内力值,为一个广义力,只在计算过程中出现,在实际施工过程中并不存在,是理论计算中零状态下不可缺少的参数。

结构在设计前只已知了部分状态参数,而其他状态参数在结构设计、计算与施工成型过程中也是必需的,特别是零状态下的2个参数是分析计算的基础。如何由已知的状态参数得到其他未知状态参数就构成了形态分析的核心内容。当已知的状态参数不同时,所求解的状态参数就会发生变化,这样就产生了不同的形态分析问题。依据零状态下所求解参数的不同,将结构形态分析问题分为以下三类:

(1) 找力问题,结构在零状态下的几何构形(G_A)已知,而需通过所有已知条件求解结构零状态下所需施加的初应变(F_A)的问题。

(2) 找形问题,结构在零状态下所需施加的初应变(F_A)已知,而需通过所有已知条件求解结构零状态下几何构形(G_A)的问题。

(3) 找力+找形问题,结构在零状态下的几何构形(G_A)与所需施加的初应变(F_A)均未知,而需通过所有已知条件来进行求解的问题。

在设计前至少需已知2个状态参数。通过对上述6个状态参数的不同组合可得到15种形态分析问题。当已知状态参数都为力时,在计算过程中,无法建立计算模型对结构进行计算求解,这种情况在实际中也并不存在。而零状态下几何构形与所需施加的初应变均已知时,无需进行形态分析。去除上述两种情况,在实际中仅存在11种形态分析问题,都可归结到上述的三类问题中,问题的分组与归并结果见图1。

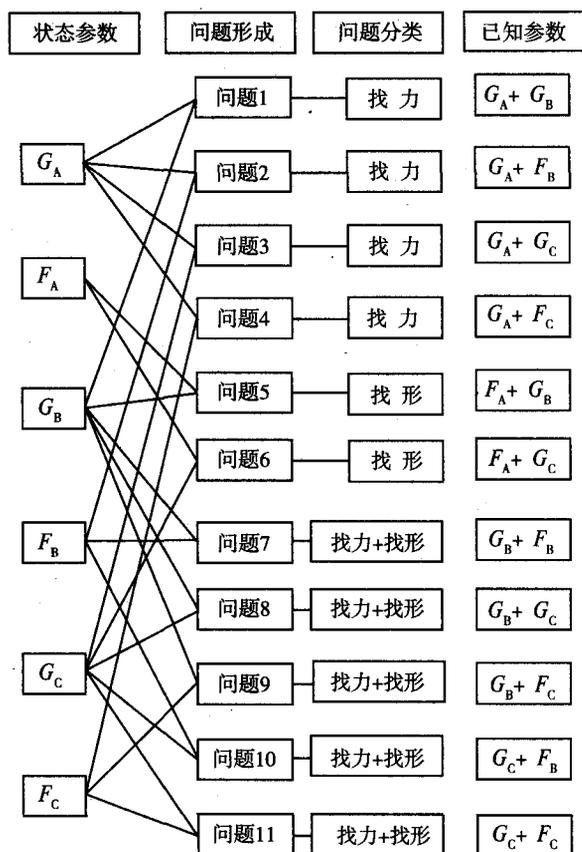


图1 弦支穹顶形态分析问题分类图

2 问题的求解

针对上述三类问题:找力、找形、找力+找形,分别进行分析研究,给出相应的求解思路与计算公式。

2.1 找力问题分析

国内学者对弦支穹顶的找力问题研究相对较多^[4-6],并利用张力补偿法的思想^[9]给出了找力计算公式与具体的计算流程。为了确定结构在零状态下所需施加的初应变,并提高找力计算的效率,本文借鉴牛顿法思想给出了一种迭代算法。迭代计算公式的推导如下。

在零状态时下部结构的一组初应变值,在张拉成型后就会对应初始态时下部结构的一组内力值。因为结构的预应力是通过主动张拉单元施加初应变的方法得到的,所以在下文的所有推导与计算过程中均以初应变 ε 来表示与之对应的零状态下参数 F_A 。下部索杆单元初始态时的内力 N 可写为零状态时初应变 ε 的函数表达式:

$$N = \phi(\varepsilon) \quad (1)$$

当结构按施工工序要求张拉完成后，在初始态时，下部索杆的内力值达到内力设计值，这时可写为如下方程式：

$$N - \tilde{N} = 0 \quad (2)$$

式中： \tilde{N} 表示结构在初始态时下部索杆（或部分索杆）单元的内力已知值。

将函数（1）代入方程（2）中可得如下方程：

$$\phi(\varepsilon) - \tilde{N} = 0 \quad (3)$$

方程（3）的解 ε^* 就是结构下部索杆在零状态时需施加的初始应变值。本文利用牛顿法的思想^[10]，来构造方程解的迭代计算公式。将方程（3）改写为以下函数表达式：

$$f(\varepsilon) = N - \tilde{N} = \phi(\varepsilon) - \tilde{N} \quad (4)$$

在构造牛顿迭代计算公式时，需求解上述函数的一阶导数。由于 ϕ 为隐式表达式，且与施工张拉工序有关，直接求其导数的难度较大，故在迭代过程中将函数（4）的一阶导数用差分的形式来表示，写为：

$$f'(i\varepsilon) = \frac{iN - i-1N}{i\varepsilon - i-1\varepsilon} \quad (5)$$

式中： i 表示计算迭代的次数（ $i=1, 2, 3, \dots$ ）； $i\varepsilon$ 和 iN 分别表示第 i 次迭代计算时索杆单元在零状态下所需的初应变值与张拉完成后在初始态下的内力值； $i-1\varepsilon$ 和 $i-1N$ 为迭代初始值； 0ε 、 $0N$ 无实际物理意义，都取为零。

仿牛顿公式，对方程（3）求解的迭代计算公式可以构造为：

$$\begin{cases} i+1\varepsilon = i\varepsilon - \frac{f(i\varepsilon)}{f'(i\varepsilon)} = i\varepsilon - \frac{iN - \tilde{N}}{i\varepsilon - i-1\varepsilon} \\ 0\varepsilon = 0N = 0 \end{cases} \quad (6)$$

在迭代计算过程中，迭代终止的判断条件为，结构下部索杆的内力计算值与已定预应力值之差的范数小于计算精度要求，可表示为：

$$\|N - \tilde{N}\|_{\infty} \leq \delta_1 \quad (7)$$

式（6）与式（7）就是找力计算过程中所需的计算公式与收敛判断条件。具体的计算流程见图2。

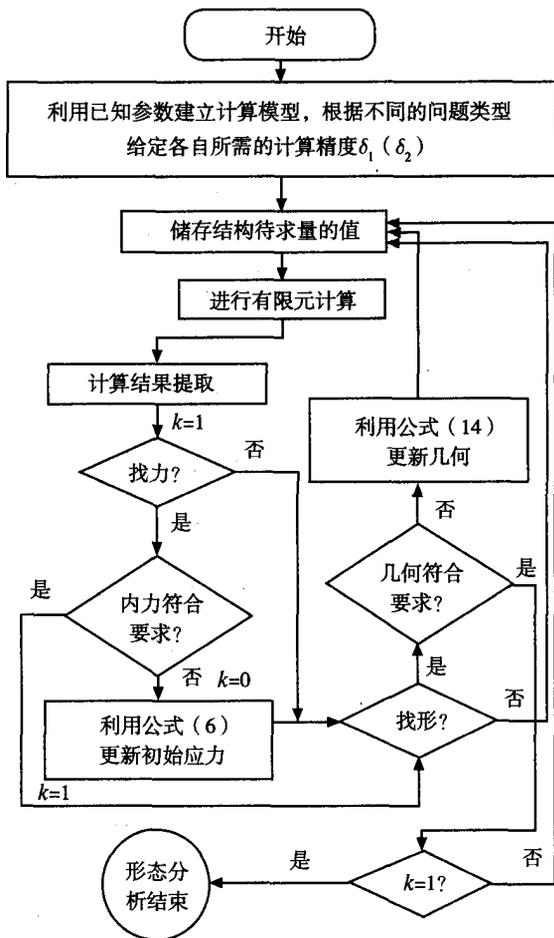


图2 计算流程图

2.2 找形问题分析

由于弦支穹顶结构的节点数目较多，所以找形问题较找力问题复杂，但同样可以利用找力的思想来进行问题的分析。对于弦支穹顶的找形问题，在利用上述找力的算法进行迭代计算时，为了方便，其迭代的初始值一般取已知的结构几何构形，初值的选择范围较小，这样对于只有局部收敛性的牛顿法来说，当初值选择离精确值较远时可能导致算法不收敛。在不改变计算初值的情况下，为了确保求解过程的收敛性，可以对牛顿法进行改进而采用牛顿下山法或类似文献^[11]中所述的在牛顿法基础上，结合线性搜索和回溯的方法。甚至可采用算法简单、收敛性总能得到保证的逐步搜索法进行计算，但计算速度较慢。下面以初始态下的几何构形 G_B 与零状态下所需施加的初应变（ F_A ）均已知的第5种问题为例，来推

导结构的找形计算公式。

当结构零状态下的几何构形 G_A 确定时,对结构施加确定的初应变张拉成形后可得到确定的初始态下几何构形 G_B 。确定的 G_A 施加一定的初始应变计算后便可得到确定的 G_B ,这样可将 G_B 写为 G_A 的函数表达式:

$$G_B = \phi(G_A) \quad (8)$$

结构确定 ϕ 时准与零状态下施加的初应变值(F_A)有关。

当结构按施工假定要求张拉完成后,初始态下结构的几何构形达到几何构形已知值,这时可写为如下的方程式:

$$G_B - \tilde{G} = 0 \quad (9)$$

式中: \tilde{G} 表示结构(或部分结构)几何构形已知值。

将函数(8)代入方程(9)中可得:

$$\phi(G_A) - \tilde{G} = 0 \quad (10)$$

方程(10)的解 G_A^* 就是所需求解的零状态下结构几何构形。将方程(10)改写为以下函数表达式:

$$f(jG_A) = \phi(jG_A) - \tilde{G} \quad (11)$$

式中: j 为结构的计算次数; jG_A 为第 j 次计算时结构在零状态下所采用的几何构形。

结构在第 j 次张拉过程中产生的位移 jU 可以表示为第 j 次张拉过程中初始态下几何构形与零状态下几何构形的差值:

$$jU = \phi(jG_A) - jG_A \quad (12)$$

将式(12)代入式(11)可得:

$$f(jG_A) = jG_A + jU - \tilde{G} \quad (13)$$

为了计算方便对方程(10)求解的迭代计算公式可以简单地构造为:

$${}^{k+1}G_A = {}^kG_A - f({}^kG_A) = \tilde{G} - {}^kU \quad (14)$$

在计算过程中,计算结束的准则为初始态下结构几何构形与已知值之差的无穷范数小于计算精度要求,可表示为:

$$\|jG_A + jU - \tilde{G}\|_{\infty} \leq \delta_2 \quad (15)$$

式(14)与式(15)就是找形过程中所需的计算公式与计算结束判断准则,具体计算流程见图2。方程(10)的迭代计算公式可以构造为与

找力计算相似的公式,也可以在收敛速度与收敛适应性等方面对其进行改进,使其对初值的选择范围扩大,计算的收敛性增强。

2.3 找力+找形问题分析

这类问题,零状态下的几何构形与所需施加的初应变(F_A)都需求解,在找力的同时需进行找形分析,由于结构的几何构形与内力相互耦合,所以求解计算较为复杂,文献[3,6]各给出了一种计算流程,算法思想不尽相同。为了能够有效地利用上述两个问题的计算方法与求解思路,在求解过程中本文认为可以采用以下3种途径来将上面的找形问题与找力问题结合在一起来解决找力+找形问题:

(1) 将找力问题完全嵌套在找形的计算中,每次的找形是在找力完成的基础上进行(在找形时假定零状态下所需施加的初应变(F_A)已确定);

(2) 将找形问题完全嵌套在找力的计算中,每次的找力是在找形完成的基础上进行(在找力时假定零状态下的几何构形已确定);

(3) 找力与找形同时进行。

经过计算对比可知第1种与第2种分析方法的力学概念清晰,但计算量较大。第3种方法虽没有对耦合进行特意处理,但也可达到解决问题的目的,且计算量较少。

本文采用第3种方法对这一问题进行处理,具体计算流程见图2。在计算流程中主要包括了两个模块:找形模块与找力模块,分别使用时可以解决找形问题与找力问题。流程图将三类问题有机地统一在了一起,可根据问题类型的不同而设置相应不同的参数来分别求解。

3 算例

图3所示为一弦支穹顶,下部结构中构件的位置与截面面积分别见图3与表1,网壳中的杆件均采用准377×12mm的圆管。网壳中构件和下部撑杆的弹性模量为 $2.06 \times 10^{11} \text{N/m}^2$,密度为 $7.85 \times 10^3 \text{kg/m}^3$;下部索的弹性模量为 $1.9 \times 10^{11} \text{N/m}^2$,密度为 $6.55 \times 10^3 \text{kg/m}^3$ 。

图3所示几何构形为已知几何构形 \tilde{G} ，假定结构采用张拉斜索成型，当结构施工张拉完成后，要求各圈环索的内力值由内及外分别为500kN (Hs1)、1000kN (Hs2)、2500 kN (Hs3)，这便是结构初始态下的已知内力 \tilde{N} 。

利用这一计算模型，分别对上述三类形态分析问题中的找力问题与找力+找形问题进行计算分析。

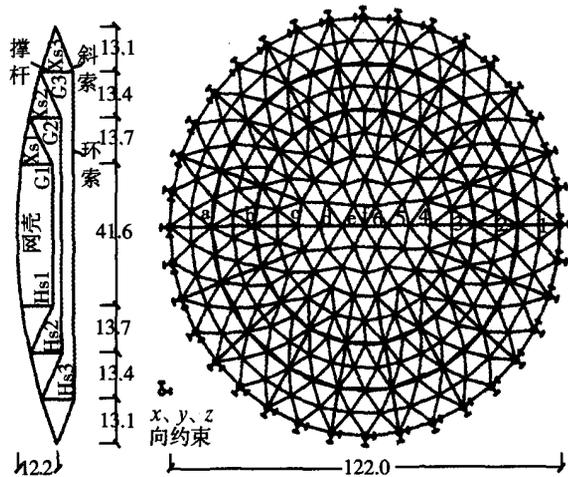


图3 模型计算简图

表1 构件截面面积

环索	截面积 (m ²)	斜索	截面积 (m ²)	撑杆	截面积 (m ²)
Hs1	0.00285	Xs1	0.00285	G1	0.00466
Hs2	0.0057	Xs2	0.00285	G2	0.00466
Hs3	0.01124	Xs3	0.00562	G3	0.00466

3.1 算例1 找力分析

如果结构在施工放样时按上述已知几何构形 \tilde{G} 来进行，张拉结束后结构的各圈环索内力达到上述内力已知值 \tilde{N} 。此时已知的状态参数即为：零状态下的几何构形 G_A 与初始态下的内力 F_B 。这是形态分析中的第2种问题，属于找力问题。利用找力计算公式按计算流程对结构进行找力分析，计算结果见表2。在计算结果中零状态下的 F_A 以所对应的应变给出，在计算过程中采用的是斜索张拉成型，斜索为主动张拉单元，所以在计算时只对斜索进行了预应力的施加，在零状态下表现为仅斜索施加初应变。利用计算结果绘制了Hs3的内力在找力迭代过程中的变化曲线见图4。

表2 找力计算结果

索杆 编号	零状态下初应变 $F_A (\times 10^{-3})$			初始态下内力值 F_B (kN)		
	G	Xs	Hs	G	Xs	Hs
1	0	2.929	0	-88.6000	196.910	500.000
2	0	3.056	0	-156.648	383.620	1000.000
3	0	4.436	0	-346.000	938.930	2500.000

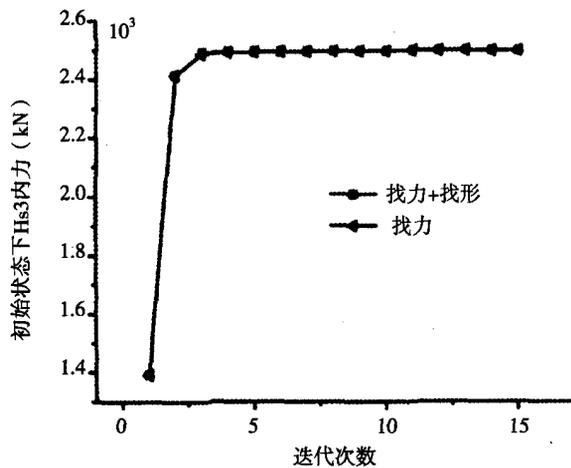


图4 找力迭代计算过程图

3.2 算例2 找力+找形分析

如果结构在施工张拉结束后结构的几何构形为已知几何构形 \tilde{G} ，结构各圈环索内力值为各环索内力已知值 \tilde{N} 。此时已知的状态参数即为：初始态下的几何构形 G_B 与初始态下的内力 F_B 。这是形态分析中的第7种问题，属于找力+找形问题。按计算流程对结构零状态下的几何构形(G_A)与所需施加的初应变(F_A)进行计算。两个状态下结构的力参数计算结果见表3，这里同样在计算过程中采用的是斜索张拉成型，斜索为主动张拉单元，所以在计算时只对斜索进行了初应变施加，在零状态下表现为仅斜索有初应变。由于结构的节点与单元较多，限于篇幅本文仅将9个控制节点的坐标、6个控制单元的单元长度(见图3)在两个状态下的值列于表4与表5。在表5中节点的上下分别指结构上部网壳中的节点与对应的下部索杆下节点。Hs3的内力值和控制节点f的z向坐标值随迭代计算的变化曲线分别见图4与图5。

由表2与表3可以看出，结构在两个状态下的力参数在大小与分布上相差较大，这主要是由于在张拉过程中内力发生了重分布，其他被动张拉

单元也会产生一定的内力。内力重分布的发生会对由结构在零状态下所需施加的初应变 (F_A) 换算成的应力造成较大的损失,所以在分析计算时对结构进行找力分析是必需的。

由表4可以看出,找形计算后结构在两个状态下各单元长度之差甚小,这样的下料长度,对施工的精度要求很高,一般很难得到保证,所以结构在建造过程中完全可按已知的结构几何构形进行下料。这可能也是文献[4]得出了弦支穹顶不需进行找形分析结论的一个原因。但由表5可以看出,两个状态下的节点坐标之差较大,上部网壳结构中的最大差值为36.2mm,下部索杆节点的最大差值为56 mm。从这一点上看,如将已知几何构形作为初始态时结构的几何构形,那么结构的找形分析也是必需的,放样安装时应该按找形后的计算结果进行。

由图4、图5可以看出,本文的计算方法迭代收敛较快,且找力较找形要快。同时找形+找力与单纯的找力迭代次数基本一致,这说明下部索杆的内力与结构整体几何的相互耦合性较小,这也说明,这种将找力与找形同时进行的计算方法有效可行。

表3 不同状态下的索杆内力值

索杆 编号	零状态下初应变 $F_A(\times 10^{-3})$			初始态下内力值 $F_B(\text{kN})$		
	G	Xs	Hs	G	Xs	Hs
1	0	2.955	0	-88.950	197.200	500.000
2	0	3.049	0	-156.620	384.100	1000.000
3	0	4.413	0	-345.030	940.470	2500.000

表4 不同状态下的控制单元长度

状态	L (mm)					
	1	2	3	4	5	6
零状态	9504.6	7193.2	9578.7	7009.0	6904.3	6957.0
初始态	9503.8	7192.5	9578.6	7009.1	6903.8	6956.6
差值	0.8	0.7	0.1	0.2	0.5	0.4

表5 不同状态下的控制节点坐标

节点编号	x (mm)			y (mm)			z (mm)			
	零状态	初始态	差值	零状态	初始态	差值	零状态	初始态	差值	
a	上	-47942.5	-47938	-4.5	0.0	0.0	0.0	4789.5	4781.7	7.8
	下	-47882	-47938	56	1.2	0.0	-1.2	-5432.7	-5437	4.3
b	上	-345115	-34507.3	-4.2	0.0	0.0	0.0	8405.8	8400.5	5.3
	下	-34475	-34507.3	32.3	-0.1	0.0	0.1	-1559.3	-1563.1	3.8
c	上	-20808.4	-20811.1	2.7	0.0	0.0	0.0	10792.5	10828.7	-36.2
	下	-20792.5	-20811.1	18.6	1.1	0.0	-1.1	992.4	1029.4	-37
d		-13842.4	-13843.5	1.1	0.0	0.0	0.0	11570.8	11590	-19.2
e		-6955.1	-6954.9	-0.2	0.0	0.0	0.0	12054.5	12047.4	7.1
f		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	12216.4	12200	16.4

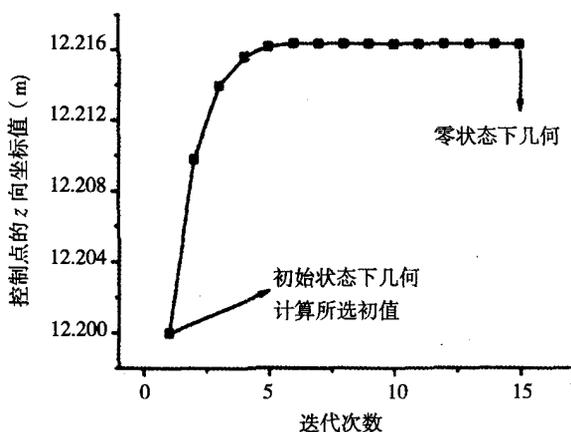


图5 找形迭代计算过程图

4 结论

(1) 本文提出了弦支穹顶的11种形态分析问题,并根据结构已知条件的不同,将这些问题分为三类:找力、找形和找力+找形。这些问题基本覆盖了结构实际中可能存在的形态分析问题。

(2) 通过对三类问题的具体分析,分别得到了针对不同问题的具体计算公式,利用计算公式能有效地解决各种形态分析问题,且计算速度较快。

(下转第25页)

5 应用效果

重庆青草背长江大桥路线等级为双向四车道高速公路,全长1719米、主跨788米,索塔高167米,主梁分50个吊装梁段,最大的吊装重量为242.3吨,提升高度最高达100米。每个钢桁梁节段采用缆载吊机吊装就位(如图5所示)。

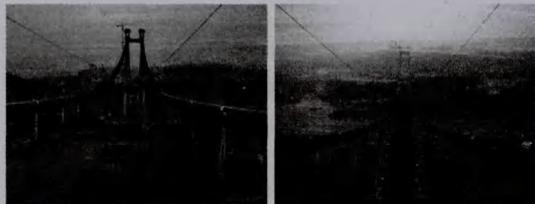


图5 重庆青草背长江大桥钢桁梁吊装施工现场

(上接第8页)

(3) 由零状态下所需施加的初应变(F_A)换算成的应力,经内力重分布后,与初始态下的内力在大小与分布上均有较大差别,故弦支穹顶的找力分析是必需的。

(4) 找力与找形同时进行,可以有效地解决找力+找形问题,且计算迭代较快。

(5) 结构通过找形计算出的各单元长度与已知结构几何构形下各单元的长度相差甚小,但部分节点坐标却相差较大,所以如将已知几何构形作为初始态时结构的几何构形,那么结构的找形分析也是必需的,建议结构在建造时可直接按已知几何构形来进行下料,但应按找形后的计算结果进行放样安装。

参考文献

- [1] Kawaguchi M, Abe M, Hatato T, et al. Structural tests on a full-size suspend-dome structure[C]/IASS International Symposium'97 on Shell & Spatial Structure. Singapore, 1997:431-438
- [2] Kawaguchi M, Abe M, Tatemichi I. Design, tests and realization of "suspend-dome" system[J]. Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures, 1999, 40(3): 179-192
- [3] 张明山. 弦支穹顶结构的理论研究[D]. 浙江: 浙江大学, 2004 (Zhang Mingshan. Theoretical Research on Suspend-Dome [D]. Zhejiang: Zhejiang University, 2004 (in Chinese))
- [4] 郭云. 弦支穹顶结构形态分析、动力性能及静动力试验研究[D]. 天津: 天津大学, 2003 (Guo Yun. Shape Analysis,

经过更改后的提升千斤顶在重庆青草背大桥上成功吊起了50片梁,平均每片梁的提升高度为100m,总共提升了5000m,瞬时速度达到35mm/s左右,经计算活塞往复运动40000余次,直至该部分工程完工,提升千斤顶的密封性均能得到很好的保证,这充分说明,在高速提升情况下,采用1道格莱圈密封+酚醛夹布导向带,取得很好的效果,具有较高的应用价值。

参考文献

- [1] 梁利文, 李兴奎等. 液压提升设备在桥梁钢桁梁高速提升中的应用[J]. 预应力技术, 2010.3
- [2] 何存兴. 液压元件[M]. 机械工业出版社, 1982
- [3] 刘金标, 全志永等. 密封装置的泄漏与防控[J]. 液压气动与密封, 2011.2
- [4] Dynamic Properties Study and Static and Dynamic Field Tests of Suspend-dome Structure[D]. Tianjin: Tianjin University, 2003 (in Chinese)
- [5] 李永梅, 张毅刚, 杨庆山. 索承网壳结构施工张拉索力的确定[J]. 建筑结构学报, 2004, 25(4): 76-81 (Li Yongmei, Zhang Yigang, Yang Qingshan. Determination of cable forces during construction for cable supported lattice shells[J]. Journal of Building Structures, 2004, 25(4): 76-81 (in Chinese))
- [6] 吕方宏, 沈祖炎. 修正的循环迭代法与控制索原长法结合进行杂交空间结构施工控制[J]. 建筑结构学报, 2005, 26(3): 92-97 (Lü Fanghong, Shen Zuyan. Control of erection of hybridized space structure using the modified cyclic iteration and initial length control methods[J]. Journal of Building Structures, 2005, 26(3): 92-97 (in Chinese))
- [7] 钱若军, 杨联萍. 张力结构的分析·设计·施工[M]. 南京: 东南大学出版社, 2003
- [8] 张莉. 张拉结构形状确定理论研究[D]. 上海: 同济大学, 2000 (Zhang Li. Research on Form-Finding Theory of Tension Structures[D]. Shanghai: Tongji University, 2000 (in Chinese))
- [9] 卓新, 石川浩一郎. 张力补偿法及其在预应力空间结构中的应用[C]/第二届全国现代结构工程学术报告会论文集. 北京: 工业建筑杂志社, 2002: 310-316
- [10] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2001 (Li Qingyang, Wang Nengchao, Yi Dayi. Numerical Analysis [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2001 (in Chinese))
- [11] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, et al. Numerical Recipes in C[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993