

# 预应力梁横向振动分析的模态摄动方法

楼梦麟 洪婷婷

(同济大学土木工程防灾国家重点实验室 上海 200092)

**摘要:**以预应力简支梁为例,分析了预应力在梁的横向振动过程中的变化,建立了预应力梁横向弯曲振动的微分方程。采用模态摄动法,进一步推导出预应力梁模态特性的近似分析方法,把复杂的变系数微分方程的求解转化为线性代数方程组的求解,从而有效地简化了计算过程。最后通过算例,讨论了预应力对梁的横向振动特性的影响。计算结果表明:当施加预应力的位置有较大的偏心距时,预应力对梁的自振特性有较大的影响。

**关键词:**结构工程 预应力梁 横向振动 动力分析 模态摄动法

目前,预应力结构已经广泛地应用于工业民用建筑和交通运输建筑中<sup>[1]</sup>。预应力的存在,对结构的静力和动力特性均会产生影响。预应力对结构的静力影响已经有了不少的研究<sup>[2-6]</sup>,但由于预加力对梁的横向振动的影响较为复杂,相关研究工作<sup>[7,8]</sup>还不够深入。本文从建立预应力梁的动力平衡方程开始,研究施加预应力后梁的动力特性的分析方法并且讨论预应力对梁自振特性的影响。

## 1 预应力梁横向振动方程

如图1所示,在预应力钢筋混凝土简支梁的两端钢筋的锚固点作用一对预加力,偏心距为 $e$ 。由于是偏心受压,那么在两端面上除了一个轴压力 $p_0$ 外,还有一个附加力偶,其初始值为 $M = p_0 e$ 。梁的振动过程中,由于梁的动变形,使得梁两端的预加力有一定的变化。因此,可设

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \Delta p \\ M &= p e = (p_0 + \Delta p) e \end{aligned} \quad (1)$$

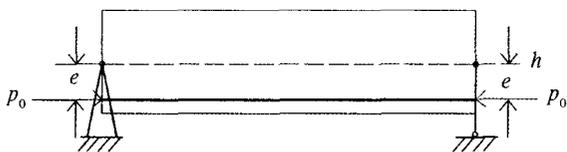


图1 预应力梁

在自由振动条件下,预应力梁的横向弯曲振动微分方程<sup>[8]</sup>为:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] + \frac{\partial^2 (py)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (2)$$

式中 $EI(x)$ 为梁的抗弯刚度, $m$ 为梁的单位长度质

量, $y$ 为振动位移。把式(1)代入式(2)得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI(x) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}] + \frac{\partial^2 (p_0 y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\Delta p y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (p_0 e)}{\partial x^2} \\ - \frac{\partial^2 (\Delta p e)}{\partial x^2} + m(x) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

若假定所考虑的是均匀梁,梁的截面抗弯刚度 $EI$ 和单位梁长的质量 $m$ 都为常数,同时 $p_0$ 和 $e$ 也为常数,而 $\Delta p$ 和 $y$ 为坐标 $x$ 的函数。一般认为 $y$ 远小于 $e$ ,因此 $\Delta p y$ 远小于 $\Delta p e$ ,可以忽略不计。这样,式(3)式为:

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + p_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x^2} = 0 \quad (4)$$

## 2 $\Delta p(x)$ 的计算模型

$\Delta p$ 是随振动位移的变化而变化的预加力改变量,它对梁振动的影响表现在式(4)中的最后一项,减小了梁截面上的剪力,这一剪力的大小还与偏心距成比例。为使方程可解,需建立起 $\Delta p$ 与 $y$ 间的联系。这一关系较为复杂,本文假定 $\Delta p$ 与梁的振动位移 $y$ 成正比:

$$y(x) = D(x) \Delta p(x) \quad (5)$$

式中系数 $D(x)$ 在不同截面 $x$ 处是不同的,可通过结构力学中的图乘法<sup>[9]</sup>加以确定。下文以简支梁为例,说明图乘法的实施过程,对于其它端部条件,图乘法的实施过程是类同的。

在梁上任一点作用横向集中力 $F$ ,则由图乘法可得锚固点产生的水平位移:

$$\delta(x) = \int \frac{m_1 M}{EI} dx = S_M \cdot e = \frac{1}{2EI} x(l-x) e F \quad (6)$$

而在锚固点作用单位力引起该锚固点的水平位移

本文获第三届欧维姆优秀预应力论文奖三等奖(原载《工程力学》2006, No. 1)

可由下式计算:

$$\delta_1 = \int \frac{m_1^2}{EI} dx + \int \frac{N_1^2}{EI} dx = \frac{le^2}{EI} + \frac{l}{EA} \quad (7)$$

由力F引起锚固力变化为:

$$\Delta p = \frac{\delta}{\delta_1} = \frac{ex(l-x)}{2l(e^2+i^2)} F \quad (8)$$

式中:  $i = \sqrt{\frac{I}{A}}$ , 为截面惯性半径。

力的作用点处梁的位移为

$$y_F = \frac{x^2(l-x)^2}{3EI} F \quad (9)$$

由式(8)和(9)可得:

$$y_F = \frac{2x(l-x)(e^2+i^2)}{3EIe} \Delta p \quad (10)$$

同时根据位移互等定律,  $\Delta p$ 在F作用点处产生的向上位移 $y_{\Delta p}$ 为:

$$y_{\Delta p} = \frac{x(l-x)e}{2EI} \Delta p \quad (11)$$

由 $y_{F-\Delta p} = y_F - y_{\Delta p}$ 与式(10)和(11), 可得梁x处的实际位移为:

$$y_{F-\Delta p} = \frac{x(l-x)(e^2+4i^2)}{6EIe} \Delta p \quad (12)$$

所以

$$D(x) = \frac{(e^2+4i^2)}{6EIe} \cdot x(l-x) = \frac{1}{K} x(l-x) \quad (13)$$

其中:  $K = \frac{6EIe}{(e^2+4i^2)}$

将式(5)和式(13)代入式(4)可得

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + (p_0 - \frac{eK}{lx-x^2}) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{2Ke(l-2x)}{(lx-x^2)^2} \frac{\partial y}{\partial x} - 2Ke \frac{3x^2-3lx+l^2}{(lx-x^2)^3} y = 0 \quad (14)$$

上式为梁在预加力作用时的无阻尼自由振动方程。可以看出, 由于预加力的作用, 使梁的横向振动比Bernoulli-Euler梁(简称B-E梁)要复杂得多。即使是均匀梁, 其横向振动方程也成为变系数的复杂微分方程, 求解难度增加。众所周知, 均匀等截面的B-E梁的横向自由振动方程为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

显然, 偏心施加预应力的影响在式(14)中表现为最后3项, 因此不考虑预应力对梁振动特

性的影响是不尽合理的, 但影响程度如何需要深入研究。

### 3 预应力梁动力特性的求解方法

获得式(14)的解析解是十分困难的, 文献[8,9]中假定 $\Delta p$ 与梁中点振动位移 $y$ 成正比(即在式(12)中取 $x=l/2$ ), 从而得到振动方程为

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + [p_0 - \frac{24EIe^2}{l^2(e^2+4i^2)}] \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad (16)$$

此时可解得梁的自振频率为

$$\omega = \sqrt{\frac{EI}{m}} \cdot (\frac{n\pi}{l})^2 \xi \quad (17)$$

其中

$$\xi = \sqrt{1 - (\frac{l}{n\pi})^2 \frac{P_0}{EI} + (\frac{l}{n\pi})^2 \frac{24e^2}{(e^2+4i^2)}} \quad (18)$$

本文对式(18)作一些讨论。从式(18)可以看出, 预加压力 $p_0$ 使梁的自振频率减小, 而预加力的偏心距 $e$ 使梁的自振频率增大; 将式(18)写成如下形式:

$$\xi = \sqrt{1 - (\frac{l}{n\pi})^2 \cdot \frac{P_0}{EI} [1 - \frac{24EI}{P_0} \cdot \frac{e^2}{l^2(e^2+4i^2)}]} \approx 1 - \frac{1}{2} (\frac{l}{n\pi})^2 \frac{P_0}{EI} (1-\beta) \quad (19)$$

其中:  $\beta = \frac{24EI}{P_0} \cdot \frac{e^2}{l^2(e^2+4i^2)}$

从上式可以看出, 由于 $n$ 在分母中, 所以随着振型阶序 $n$ 的升高, 预应力对梁自振频率影响迅速减小。同时还可以看出, 当 $\beta > 1$ 时, 偏心距 $e$ 的影响大于预加压力 $p_0$ 的影响, 预应力的总效应使梁自振频率增大, 反之当 $\beta < 1$ 时, 预加压力 $p_0$ 的影响大于偏心距 $e$ 的影响, 预应力的总效应使梁自振频率减小。

对比方程(14)和(16)可以看出, 偏心距的影响还出现在式(14)中的4, 5项中, 特别是 $y$ 前的系数为负值, 表明此项相当于沿梁有一作用系数为负分布弹簧, 它使梁的自振频率减小。这就说明偏心距对梁振动特性的影响是复杂的, 为更为全面地了解这种影响, 应直接求得方程(14)的解。本文不采用文献[8,9]的上述假定, 应用模态摄动法<sup>[10]</sup>直接建立求解式(14)的近似方法。

模态摄动法的基本思路是：把预应力梁看成B-E梁经过参数修改后的新系统，这样就能在B-E梁分析的基础上，近似地获得问题的解。模态摄动法求解过程如下：设B-E梁的各特征值为 $\lambda_i = \omega_i^2$ 的主模态函数为 $\phi_i(x)$ 。假定预应力梁的特征值和主模态函数由B-E梁相应阶序的特征值和主模态函数经过摄动而得，即：

$$\bar{\lambda}_i = \lambda_i + \Delta\lambda_i, \quad \bar{\phi}_i = \phi_i + \Delta\phi_i \quad (20)$$

其中 $\bar{\lambda}_i = \bar{\omega}_i^2$ ，摄动变量 $\Delta\phi_i$ 为除 $\phi_i$ 之外B-E梁的其余主模态函数的线性组合： $\Delta\phi_i = \sum_{j \neq i}^n \phi_j q_j$ ，

由于B-E梁有无穷多个主模态，但在一般情况下，取有限个低阶主模态进行近似计算，即 $n$ 为正整数。将式(20)代入式(14)，并在两端左乘 $\phi_k$  ( $k=1, 2, 3, \dots, n$ )后沿全梁积分，利用B-E梁主模态的正交性条件，可得一 $n$ 维非线性代数方程组：

$$([A] + \Delta\lambda_i[B])\{q\} = \{p_i\} \quad (21)$$

式中共有 $n$ 个未知数，即 $\Delta\lambda_i, q_j$  ( $j=1, 2, \dots, n, j \neq i$ )，

且有

$$[A] = [Q_1] + [Q_2] + [Q_3] + EI[Q_5] - \lambda_i m [Q_4]$$

$$[B] = -m[Q_6]$$

$$\{p_i\} = - \begin{Bmatrix} Q_{11i} + Q_{21i} + Q_{31i} \\ Q_{12i} + Q_{22i} + Q_{32i} \\ \vdots \\ Q_{1ni} + Q_{2ni} + Q_{3ni} \end{Bmatrix}$$

$$[Q_1] = \begin{bmatrix} Q_{111} & Q_{112} & \cdots & 0 & \cdots & Q_{11n} \\ Q_{121} & Q_{122} & \cdots & 0 & \cdots & Q_{12n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1i1} & Q_{1i2} & \cdots & 0 & \cdots & Q_{1in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{1n1} & Q_{1n2} & \cdots & 0 & \cdots & Q_{1nn} \end{bmatrix}$$

$$[Q_2] = \begin{bmatrix} Q_{211} & Q_{212} & \cdots & 0 & \cdots & Q_{21n} \\ Q_{221} & Q_{222} & \cdots & 0 & \cdots & Q_{22n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{2i1} & Q_{2i2} & \cdots & 0 & \cdots & Q_{2in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{2n1} & Q_{2n2} & \cdots & 0 & \cdots & Q_{2nn} \end{bmatrix}$$

$$[Q_3] = \begin{bmatrix} Q_{311} & Q_{312} & \cdots & 0 & \cdots & Q_{31n} \\ Q_{321} & Q_{322} & \cdots & 0 & \cdots & Q_{32n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{3i1} & Q_{3i2} & \cdots & 0 & \cdots & Q_{3in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{3n1} & Q_{3n2} & \cdots & 0 & \cdots & Q_{3nn} \end{bmatrix}$$

$$[Q_4] = \text{diag}[Q_{411}, Q_{422}, \dots, Q_{4ii}, Q_{4nn}]$$

$$[Q_5] = \text{diag}[Q_{511}, Q_{522}, \dots, Q_{5ii}, Q_{5nn}]$$

$$[Q_6] = \text{diag}[Q_{611}, Q_{622}, \dots, Q_{6ii}, Q_{6nn}]$$

$$\{q\} = \left\{ q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_{i-1} \quad \frac{\Delta\lambda_i}{\lambda_i} \quad q_{i+1} \quad \cdots \quad q_n \right\}^T$$

其中：

$$Q_{1ki} = \int_0^l (P_0 - \frac{ek}{lx-x^2}) \phi_k(x) \phi_i''(x) dx$$

$$Q_{2ki} = \int_0^l (\frac{2ke(l-2x)}{(lx-x^2)^2}) \phi_k(x) \phi_i'(x) dx$$

$$Q_{3ki} = \int_0^l \frac{-2ke(3x^2-3lx+l^2)}{(lx-x^2)^3} \phi_k(x) \phi_i(x) dx$$

$$Q_{4ki} = \int_0^l \phi_k(x) \phi_i(x) dx$$

$$Q_{5ki} = \int_0^l \phi_k(x) \phi_i^{(4)}(x) dx$$

式(21)为一非线性代数方程组，可采用迭代法求解<sup>[10]</sup>，在求得未知数后，不难利用式(20)获得预应力梁的自振频率 $\bar{\omega}_i$ 和振型（即模态特性）。

#### 4 数值验证

取简支梁截面宽度 $b=300\text{mm}$ ，高度 $h=600\text{mm}$ ，梁长 $L$ 、预加力 $p_0$ 和偏心距 $e$ 在计算中取不同值，以讨论这些参数的影响。在此算例中采用3种不同方法计算预应力简支梁的自振频率。这3种方法分别是：（1）不考虑预应力影响，即按B-E梁计算；（2）文献[8,9]方法；（3）本文建议的模态摄动法，表1~表3给出了相关的计算结果。各表中：误差1=（文献[8]计算结果—本文计算结果）/本文计算结果，上述计算并不是表示本文方法所得结果为精确解，只是表示两种方法结果间差别的大小；误差2=（B-E梁计算结果—本文计算结果）/本文计算结果，误差3=（B-E梁计算结果—文献[8]计算结果）/文献[8]计算结果，为B-E梁分析结果分别与其他两种分析方法结果之间的比较，能够反映不考虑预应力影响所能产生的误差趋势。

表1中列出了用不同预加力 $p_0$ 对梁自振频率的影响，其中 $e=100\text{mm}$ ， $L=10\text{m}$ ， $L/i=57.735$ 。

“误差1”一栏中的数据表明，按方法2和方法3计算所得的低阶自振频率间将有较大的差别。从

表中“误差2”和“误差3”两组数据可看出：当偏心距较小时，按本文方法计算，预加力大小变化对梁的各阶自振频率的影响不大，按B-E梁计算不会产生较大的误差。但按文献[8]方法计算，预加力大小变化对梁的基频有较大的影响。

表1a 不同预加力 $p_0$ 对梁自振频率的影响 ( $p_0=200\text{kN}$ )

计算方法	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$
B-E梁	60.44	241.75	543.95	967.02
文献[8]	65.53	247.00	549.23	972.31
本文	61.32	244.54	547.88	971.75
误差1%	6.86	1.01	0.247	0.057
误差2%	-1.44	-1.14	-0.707	-0.487
误差3%	-7.76	-2.13	-0.96	-0.54

表1b 不同预加力 $p_0$ 对梁自振频率的影响 ( $p_0=500\text{kN}$ )

计算方法	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$
文献[8]	65.04	246.49	548.71	971.79
本文	60.80	244.03	547.36	971.23
误差1%	6.97	1.01	0.247	0.057
误差2%	-0.60	-0.93	-0.62	-0.43
误差3%	-7.07	-1.92	-0.87	-0.48

表1c 不同预加力 $p_0$ 对梁自振频率的影响 ( $p_0=800\text{kN}$ )

计算方法	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$
文献[8]	64.56	245.98	548.19	971.27
本文	60.28	243.51	546.84	970.71
误差1%	7.09	1.01	0.248	0.057
误差2%	0.26	-0.71	-0.53	-0.38
误差3%	-6.38	-1.72	-0.77	-0.44

对于矩形截面梁， $i = h / 2\sqrt{3}$ ，则 $K = 6Eie / (e^2 + 4i^2) = 1.5Ebh^2 / (3elh + h / e)$ ，可见 $elh$ 是响梁自振频率的参数之一。表2中给出了不同大小的偏心距 $e$ 对梁自振频率的影响，其中 $p_0 = 500\text{kN}$ ， $L = 10\text{m}$ ， $L/i = 57.735$ 。分别取偏心距 $e = 50$ 、100和200mm，其中 $e = 100\text{mm}$ 时的计算结果已在表1b中列出，其它两种计算工况的结果列于表2中。从表2和表1b中的数据可看出：预加力 $p_0$ 偏心距的大小对梁的各阶自振频率的影响较大，偏心距越大，按B-E梁计算产生的误差也越大。

下面进一步考察不同长细比对梁自振频率的影响，计算中取 $p_0 = 500\text{kN}$ ， $e = 100\text{mm}$ 。梁长 $L = 10$ 、18和24m，其中 $L = 10\text{m}$ 时的计算结果已在表1b中列出，其它两种计算工况的结果列于表3中。从表3和表1b中的数据可看出：随着梁的长

细比增大，预加力对梁的基频的影响加大，按B-E梁计算产生的误差也越大。

表2a 不同偏心距 $e$ 对梁自振频率的影响 ( $e=50\text{mm}$ ,  $e/h=0.083$ )

计算方法	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$
文献[8]	61.06	242.38	544.58	967.65
本文	59.89	241.72	544.21	967.50
误差1%	1.95	0.27	0.067	0.015
误差2%	0.91	0.015	-0.049	-0.050
误差3%	-1.02	-0.26	-0.12	-0.07

表2b 不同偏心距 $e$ 对梁自振频率的影响 ( $e=200\text{mm}$ ,  $e/h=0.3333$ )

计算方法	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$
文献[8]	75.95	258.66	561.17	984.36
本文	63.53	250.98	556.89	982.57
误差1%	19.55	3.06	0.77	0.18
误差2%	-4.86	-3.68	-2.32	-1.58
误差3%	-20.42	-6.54	-3.07	-1.76

表3a 不同长细比对梁自振频率的影响 ( $L=18\text{m}$ ,  $L/i=103.923$ )

计算方法	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$
B-E梁	18.65	74.62	167.89	298.46
文献[8]	19.51	75.48	168.76	299.33
本文	18.16	74.72	168.34	299.16
误差1%	7.43	1.03	0.249	0.574
误差2%	2.74	-0.135	-0.268	0.234
误差3%	-4.44	-1.14	-0.52	-0.29

表3b 不同长细比对梁自振频率的影响 ( $L=24\text{m}$ ,  $L/i=138.56$ )

计算方法	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$
B-E梁	10.49	41.97	94.44	167.89
文献[8]	10.60	42.08	94.54	167.99
本文	9.81	41.65	94.31	167.90
误差1%	8.03	1.04	0.25	0.058
误差2%	6.92	0.78	0.14	-0.01
误差3%	-1.04	-0.26	-0.11	-0.06

## 5 结论

由以上几组数据可得到一些初步认识，预加力对预应力梁的动力特性有一定的影响，特别在预加力的偏心距较大或梁的长细比较大时，对梁的基频影响较大。因此，在比较重要的大型预应力结构的动力反应分析中应关注预加力的影响。比较本文和文献[8,9]的方法，文献[8,9]方法较为简便，但仅适用偏心距很小的情况。对预加力偏心距或长细比较大的预应力结构，在计算梁的第

一阶自振频率时,该方法有可能会产生较大误差,建议在重要的预应力结构中采用本文所阐述的方法。应该指出,本文方法是在理论推导下建立的,有待进一步通过实验或实测结果进行验证。

#### 参考文献

- [1] 范立础. 预应力混凝土连续梁[M]. 北京: 人民交通出版社, 1988.  
Fan Lichu. Prestressed concrete continuous beams [M]. Beijing: People Communication Press, 1988. (in Chinese)
- [2] Hindi A. Enhancing strength and ductility of post-tensioned segmental box girder bridges [J]. ACI Structural Journal, 1995, 92(1): 33-44.
- [3] Ramos G, Aparicio A C. Ultimate behavior of externally prestressed concrete bridges [J]. Structural Engineering International, 1995, (3): 172-177.
- [4] Aoricro A, Ramos G. Flexural strength of externally prestressed concrete bridges [J]. ACI Structural Journal, 1996, 93(5): 512-522.
- [5] Saiid M, Hutchens E, Gardella D. Bridge prestress losses in dry climate [J]. Journal of Bridge Engineering, ASCE, 1998, 3(3): 111-116.
- [6] Kim J-T, Yum C-B, Ryu Y-S. Identification of prestress-loss in PSC beams using modal information [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2004, 17(3-4): 467-482.
- [7] Saiid M, Douglas B, Feng S. Prestress force effect on vibration frequency of concrete bridges [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1994, 120(7): 2233-2241.
- [8] Ayaho M. Behavior of prestressed beam strengthened with external tendons [J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 2000, 126(9): 1030-1037.
- [9] 刘宏伟, 张伟, 庄惠平. 预加力对梁的动力影响分析[J]. 黑龙江科技学院学报, 2002, 12(3): 37-39.  
Liu Hongwei, Zhang Wei, Zhuang Huiping. Dynamic analysis of prestressed beams [J]. Journal of Heilongjiang Institute of Science and Technology, 2002, 12(3): 37-39. (in Chinese)
- [10] 楼梦麟, 吴京宁. 复杂梁动力问题的近似分析方法[J]. 上海力学, 1997, 18(3): 234-240.  
Lou Menglin, Wu Jingning. An approach to approximate analysis of dynamic problems of complicated beams [J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1997, 18(3): 234-240. (in Chinese)

#### (上接第8页)

(2) 由于体外索的作用, 体外索钢箱-混凝土组合梁混凝土板上缘的压应变增长率相对较低, 破坏过程平缓, 特别是在接近极限状态时, 体外索力的作用减少了脆性破坏程度。这对于承受动载的桥梁结构来说, 是有利的。

(3) 从试验实测混凝土翼板应变分布结果可以看到剪力滞效应是随着荷载的增加而变化的, 并不是常量。这个实测结果为剪力滞效应的非线性分析提供了试验依据。

(4) 钢箱与混凝土的界面最大相对滑移出现在约 $L/4$ 跨附近, 跨中相对滑移较小。通过合理设计, 跨中界面相对滑移可以控制到很小, 在极限状态分析中可近似不计界面滑移的影响。

(5) 跨中体外索应力的增长特征与跨中位移增长特征很相似, 实际上这反映出体外索的应力随组合梁变形的增大而增加的特点。跨中体外索应力与混凝土翼板上缘最大压应变有紧密的关系, 可拟合分析其曲线关系, 作为体外索应力计算的试验依据。

(6) 由试验所测沿截面高度的应变分布可见, 当钢箱与混凝土的界面相对滑移较小时, 平截面假定基本成立。此时, 在截面非线性分析模型中可采用平截面假定来计算混凝土和钢箱的应变, 这简化了分析, 误差很小。

(7) 根据试验结果, 混凝土翼板上缘压应变及钢箱底板拉应变沿截面宽度方向呈非线性分布, 这体现了剪力滞效应, 在截面非线性分析中

必须考虑这种非线性分布特点。

(8) 基于截面静力平衡条件, 选取合理的混凝土和钢箱钢材的应力-应变曲线, 可建立一组求解 $\xi$ 的二次方程, 并解出极限状态下截面的等效相对受压区高度 $\xi_u$ , 然后可求得截面抵抗弯矩计算值 $M_u^C$ 。经与试验结果相对比, 本文建立的极限强度计算公式精度高, 且偏于安全, 计算相对误差仅为-1.4288%。

致谢

南京工业大学结构工程试验中心对论文的试验给予了大力支持, 硕士生周奇等参加了试验测试工作, 作者在此表示衷心的感谢。

#### 参考文献

- [1] Sennah K M, Kennedy J B. Load distribution factors for composite multicell box girder bridges [J]. ASCE, Journal of Bridge Engineering, 1999, 4(1): 71-78
- [2] Okeil Ayman M, El-Tawil Sherif. Warping stresses in curved box girder bridges: case study [J]. ASCE, Journal of Bridge Engineering, 2004, 9(5): 487-496
- [3] Sennah K M, Zhang Xuesheng, Kennedy J B. Impact factors for horizontally curved composite box girder bridges [J]. ASCE, Journal of Bridge Engineering, 2004, 9(6): 512-520
- [4] Samaan M, Sennah K, Kennedy J B. Distribution factors for curved continuous composite box-girder bridges [J]. ASCE, Journal of Bridge Engineering, 2005, 10(6): 678-692
- [5] 王拥军. 北京市西四环复兴路立交变截面连续钢组合梁设计[C]//第十四届全国桥梁学术会议论文集, 上海: 同济大学出版社, 2000: 877-879
- [6] 王韬, 张宏利. 京东立交桥钢箱-混凝土结合梁的设计[J]. 铁道标准设计, 1999(10): 4-7
- [7] 李余华. 石家庄南环大桥大跨度钢箱梁架设计[J]. 铁道建筑技术, 2000(3): 4-7
- [8] 张俊平, 黄道沸. 大跨度异形结合梁设计与分析计算[J]. 梁建设, 2000(4): 29-31
- [9] 周履. 无粘结力筋与体外力筋预应力混凝土桥梁的发展历程与现状[J]. 桥梁建设, 1997(3): 1-11
- [10] 刘岚. 全体外索预应力混凝土箱梁桥的设计与模型试验[J]. 国外桥梁, 2001(3): 33-40