

肋环型索穹顶初始预应力分布的快速算法

董石麟 袁行飞

(浙江大学空间结构研究中心 杭州 310027)

摘要:肋环型索穹顶是美国工程师Geiger根据Fuller的张拉整体结构思想开发的一种新型预张力结构,并最早应用在汉城奥运会的体操馆和击剑馆。考虑到该结构是一种轴对称结构,本文提出了确定初始预应力分布的快速算法。该法从平面径向桁架节点平衡关系入手,推导了不设有内拉环的肋环型索穹顶预应力杆内力一般性的计算公式。对特定参数的索穹顶结构还给出了内力计算用表。通过本文提供的分析方法、计算公式和内力计算用表,可方便快速地确定肋环型索穹顶结构的初始预应力分布,为该类结构的进一步设计和力学性能分析提供基础。

关键词:索穹顶 肋环型索穹顶 张拉整体 初始预应力

1. 引言

索穹顶结构是美国工程师Geiger根据Fuller^[1]的张拉整体结构思想开发的一种新型预张力结构,并最早应用在汉城奥运会的体操馆(如图1)和击剑馆^[2]。它体现了Fuller关于“压杆的孤岛存在于拉杆的海洋中”的思想,是一种受力合理、结构效率高的结构体系。由于同时具有构造轻盈、尺度宏伟和造价经济等特点,这种结构一经问世便受到了建筑师的青睐,继汉城体操馆和击剑馆之后,Geiger和他的公司又相继建成了红鸟体育馆和太阳海岸穹顶。由美国工程师M.P.Levy和T.F.Jing设计的乔治亚穹顶^[3]是1996年亚特兰大奥运会主赛馆的屋盖结构(如图2)。之后他们还成功设计了圣彼得堡的雷声穹顶和沙特阿拉伯利亚德大学体育馆的可开启穹顶等多项大跨度屋盖结构,进一步展示了索穹顶结构的开发应用前景。

同张拉整体结构相似,索穹顶结构的力学分析包括找形分析(Form-finding)、预应力分布的确定和外力作用下的性能分析等内容^[4]。由于索穹顶结构没有自然刚度,它的刚度完全由预应力提供。根据结构初始几何形状、构件的关联关系(拓扑)确定形成一定刚度的初始自应力是索穹顶设计首先要解决的问题。

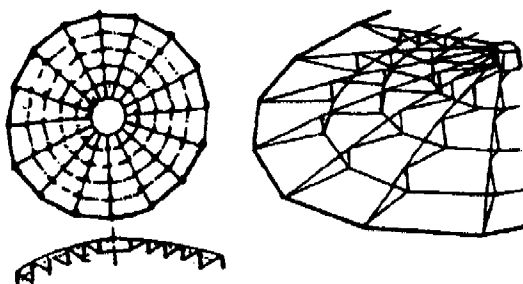


图1 Geiger设计的汉城体操馆穹顶

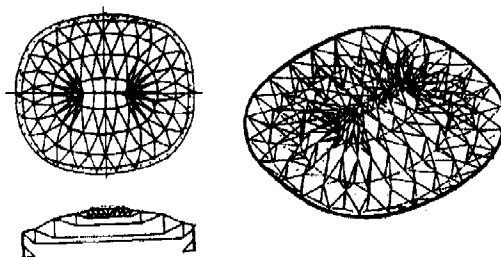


图2 Levy设计的乔治亚穹顶

考虑到肋环型索穹顶是一种轴对称结构,本文提出了确定该种结构初始预应力分布的快速算法。文中首先提出平面径向桁架简化计算模型,然后通过对各节点建立平衡关系推导了不设有内拉环的肋环型索穹顶预应力杆内力一般性的计算公式。文章还对特定参数的肋环型索穹顶给出了内力计算用表,为该类结构的进一步设计和力学性能分析提供了基础。

2. 计算模型

肋环型索穹顶结构是由Geiger设计并首次应用到工程中的，所以它又被命名为Geiger型索穹顶。这种形式的代表工程为图1所示的汉城体操馆穹顶。它由径向脊索、径向斜索、环索和压杆组成，并支承于周边受压环梁上。在具体工程应用中，肋环型穹顶又有不设内拉环和设有内拉环两种情况。

考虑到肋环型索穹顶为一轴对称结构^[5]，它的计算模型可取一榀平面径向桁架。针对不设内拉环和设有内拉环两种情况，分别有计算简图3和4：

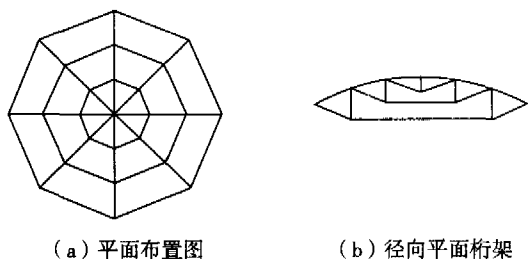


图3 不设内拉环的肋环型索穹顶

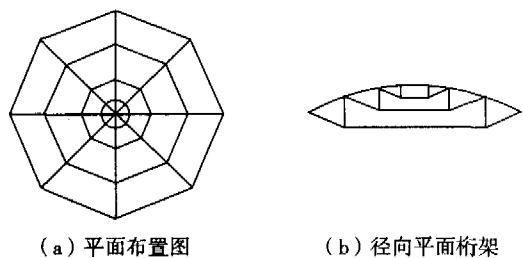


图4 设有内拉环的肋环型索穹顶

其中图3b径向平面桁架中的中心竖线为等效竖杆，等效竖杆内力 $V_{0, \text{equ}}$ 与结构中心竖杆实际内力 V_0 的关系为

$$V_{0, \text{equ}} = \frac{2}{n} V_0 \quad (1)$$

图3b和4b径向平面桁架中的水平线为等效环索，等效环索内力 $H_{i, \text{equ}}$ 与结构环索实际内力 H_i 的关系由图5可得

$$H_{i, \text{equ}} = 2H_i \cos \phi_n = 2H_i \cos \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right] = 2H_i \sin \frac{\pi}{n} \quad (2)$$

式(1)、(2)中 n 为结构平面环向等分数。

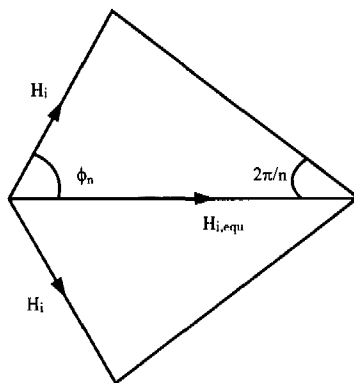


图5 环索内力示意图

3. 初始预应力分布

分别以图3b和图4b所示简化平面桁架为基础，对各节点建立平衡关系，可推导各类杆件内力计算公式如下。

3.1 不设内拉环的情况

由平面桁架的对称性再引入边界约束条件（包括对称面的对称条件）后，并可进一步简化为图6所示的半榀平面桁架，由机构分析可知该结构为一次超静定结构，在下面的推导中以中心竖杆的实际内力 V_0 为基准。对图7所示各类杆件内力示意图，由内到外对各节点建立平衡方程，可得如下关系式：

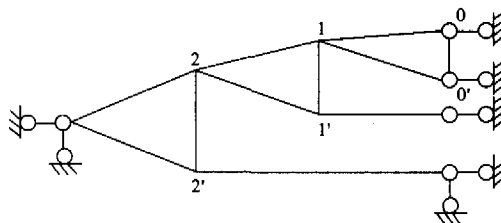


图6 简化半榀平面桁架

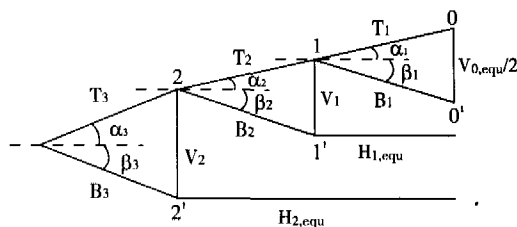


图7 各类杆件内力示意图

$$\text{节点0: } T_1 = -\frac{1}{n \sin \alpha_1} V_0 \quad (3)$$

$$\text{节点}0': B_1 = -\frac{1}{n \sin \beta_1} V_0 \quad (4)$$

$$\text{节点}1: T_2 = \frac{T_1 \cos \alpha_1 + B_1 \cos \beta_1}{\cos \alpha_2}, V_1 = -T_2 \sin \alpha_2 \quad (5)$$

$$\text{节点}1': B_2 = -\frac{V_1}{\sin \beta_2}$$

$$H_{1, \text{equ}} = B_2 \cos \beta_2 \Rightarrow H_1 = \frac{B_2 \cos \beta_2}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \quad (6)$$

$$\text{节点}2: T_3 = -\frac{T_2 \cos \alpha_2 + B_2 \cos \beta_2}{\cos \alpha_3}, V_2 = -T_3 \sin \alpha_3 \quad (7)$$

$$\text{节点}2': B_3 = -\frac{V_2}{\sin \beta_3}$$

$$H_{2, \text{equ}} = B_3 \cos \beta_3 \Rightarrow H_1 = \frac{B_3 \cos \beta_3}{2 \sin \frac{\pi}{n}} \quad (8)$$

上述各式中 T_i 为第 i 段脊索的内力; B_i 为第 i 段斜索的内力; H_i 为第 i 圈环索的内力; V_i 为第 i 根竖杆的内力。

对上述公式进行汇总。并用中心竖杆内力 V_0 来表达。可得各脊索、压杆、斜索和环索的一般性内力计算公式:

$$\text{当} i=1 \text{ 时, } T_1 = -\frac{1}{n \sin \alpha_1} V_0, B_1 = -\frac{1}{n \sin \beta_1} V_0 \quad (9)$$

当 $i \geq 2$ 时,

$$\left. \begin{aligned} T_i &= \frac{(\cot \alpha_1 + \cot \beta_1)(1 + \tan \alpha_1 \cot \beta_2) \dots (1 + \tan \alpha_{i-1} \cot \beta_{i-1}) (-V_0)}{n \cos \alpha_i} \\ B_i &= T_i \sin \alpha_i / \sin \beta_i \\ V_{i-1} &= -T_i \sin \alpha_i \\ H_{i-1} &= -\frac{\cot \beta_i}{2 \sin \frac{\pi}{n}} V_{i-1} \end{aligned} \right\} (10)$$

作为特例, 当 $\beta_i = \alpha_i$ 时, 则

$$\text{当} i=1 \text{ 时, } T_1 = B_1 = -\frac{1}{n \sin \alpha_1} V_0 \quad (9')$$

当 $i \geq 2$ 时,

$$\left. \begin{aligned} T_i &= B_i = -\frac{2^{i-1} \cot \alpha_1}{n \cos \alpha_i} V_0 \\ V_{i-1} &= \frac{2^{i-1} \cos \alpha_i \tan \alpha_i}{n} V_0 \\ H_{i-1} &= -\frac{2^{i-1} \cot \alpha_i}{2n \sin \frac{\pi}{n}} V_0 \end{aligned} \right\} (10')$$

由此可知此时第 i 段脊索与第 i 段斜索内力相等, 且第 i 圈环索内力是第 $i-1$ 圈环索内力的 2 倍。从以上分析和计算公式(3)-(10)可知, n 是一个参数, 只要 $n \geq 3$, 即正三角形, 正四边形, 正五边形等正多边形平面的肋环型索穹顶, 均可采用本文的分析方法和计算公式。

3.2 设有内拉环的情况

对设有内拉环的索穹顶, 仍以竖杆内力 V_0 为基准进行推导。由图8可得,

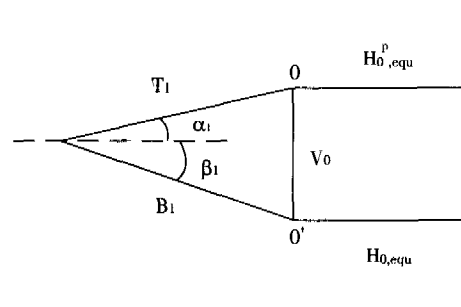


图8 内环处节点内力示意图

$$\text{节点}0: T_1 = -\frac{1}{\sin \alpha_1} V_0$$

$$H_0^p = \frac{T_1 \cos \alpha_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = -\frac{\cot \alpha_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} V_0 \quad (11)$$

$$\text{节点}0': B_1 = -\frac{1}{\sin \beta_1} V_0$$

$$H_0 = \frac{B_1 \cos \beta_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} = -\frac{\cot \beta_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} V_0 \quad (12)$$

其他节点处平衡关系和3.1节不设内环情况类似。不同的是此时 V_0 为内拉环竖杆的内力, 和结构平面环向等分数 n 无关。

经汇总, 同样可得各脊索、压杆、斜索和环索的一般性内力计算公式:

当 $i=1$ 时,

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{\sin \alpha_1} V_0, B_1 = -\frac{1}{\sin \beta_1} V_0 \\ H_0^p &= -\frac{\cot \alpha_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} V_0, H_0 = -\frac{\cot \beta_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} V_0 \end{aligned} \right\} (13)$$

当 $i \geq 2$ 时,

$$\left. \begin{aligned} T_i &= \frac{(\cot\alpha_1 + \cot\beta_1)(1 + \tan\alpha_2 \cot\beta_2) \dots (1 + \tan\alpha_{i-1} \cot\beta_{i-1})}{\cos\alpha_i} (-V_0) \\ B_i &= T_i \sin\alpha_i / \sin\beta_i \\ V_{i-1} &= -T_i \sin\alpha_i \\ H_{i-1} &= -\frac{\cot\beta_i}{2 \sin \frac{\pi}{n}} V_{i-1} \end{aligned} \right\} (14)$$

作为特例, 当 $\beta_i = \alpha_i$ 时, 则同样可得
当 $i=1$ 时,

$$T_1 = B_1 = -\frac{1}{\sin\alpha_1} V_0, H_0^p = H_0 = -\frac{\cot\alpha_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} V_0 \quad (13')$$

当 $i \geq 2$ 时,

$$\left. \begin{aligned} T_i &= B_i = -\frac{2^{i-1} \cot\alpha_1}{\cos\alpha_i} V_0 \\ V_{i-1} &= 2^{i-1} \cos\alpha_i \tan\alpha_i V_0 \\ H_{i-1} &= -\frac{2^{i-1} \cot\alpha_1}{2 \sin \frac{\pi}{n}} V_0 \end{aligned} \right\} (14')$$

4. 算例和图表

算例1 设有一不设内拉环的肋环型索穹顶, 跨度 L , 矢高 f , 球面穹顶半径 R , 其简化半橧平面桁架尺寸见图9。其中各段脊索水平投影长度相等, 由几何关系不难得出

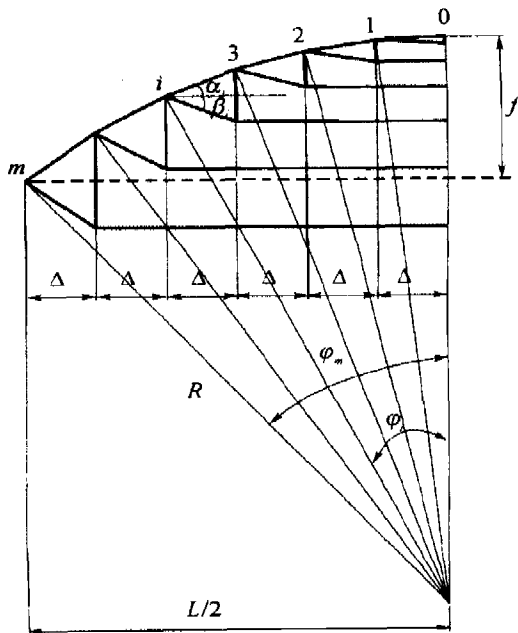


图9 不设内拉环的简化半橧平面桁架尺寸

$$\left. \begin{aligned} \sin\varphi_i &= \frac{iL}{2mR} \\ \alpha_i &= \frac{\varphi_i + \varphi_{i-1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\sin^{-1} \left[\frac{iL}{2mR} \right] + \sin^{-1} \left[\frac{(i-1)L}{2mR} \right] \right] \end{aligned} \right\} (15)$$

当 $\beta_i = \alpha_i$ 时, 将公式 (15) 代入公式 (9')、(10') 可得各类杆件内力。为便于直接应用, 下面对 $f/L=0.1, 0.15, 0.20$, $m=2, 3, 4, 5, n \geq 3$ 情况计算杆件内力 (V_0 以单位内力 -1 计), 并编制相应内力计算用表如表1、表2、表3。对给定 n , 表中内力值除以 n 即得实际结构各类杆件预应力分布的相对内力。

表1 不设内拉环的索穹顶杆件内力计算用表 ($f/L=0.1$)

i	1	2	3	4	5	
m=2	$nT_i = nB_i$	10.35	21.53			
	nV_{i-1}	-1xn	-6.24			
	$2nH_{i-1} \sin(\pi/n)$		20.61			
m=3	$nT_i = nB_i$	15.57	31.66	65.62		
	nV_{i-1}	-1xn	-6.10	-21.08		
	$2nH_{i-1} \sin(\pi/n)$		31.07	62.14		
m=4	$nT_i = nB_i$	20.78	41.94	85.52	176.33	
	nV_{i-1}	-1xn	-6.06	-20.58	-59.42	
	$2nH_{i-1} \sin(\pi/n)$		41.50	83.00	166.01	
m=5	$nT_i = nB_i$	25.98	52.27	105.82	215.67	442.81
	nV_{i-1}	-1xn	-6.04	-20.37	-58.11	-153.41
	$2nH_{i-1} \sin(\pi/n)$		51.92	103.85	207.69	415.38

表2 不设内拉环的索穹顶杆件内力计算用表 ($f/L=0.2$)

i	1	2	3	4	5	
m=2	$nT_i = nB_i$	7.20	15.69			
	nV_{i-1}	-1xn	-6.55			
	$2nH_{i-1} \sin(\pi/n)$		14.25			
m=3	$nT_i = nB_i$	10.85	22.49	48.72		
	nV_{i-1}	-1xn	-6.22	-22.47		
	$2nH_{i-1} \sin(\pi/n)$		21.61	43.23		
m=4	$nT_i = nB_i$	14.50	29.57	61.64	132.16	
	nV_{i-1}	-1xn	-6.12	-21.26	-69.85	
	$2nH_{i-1} \sin(\pi/n)$		28.93	57.86	115.71	
m=5	$nT_i = nB_i$	18.14	36.73	75.37	157.06	333.82
	nV_{i-1}	-1xn	-6.07	-20.78	-60.63	-165.71
	$2nH_{i-1} \sin(\pi/n)$		36.22	72.45	144.89	289.78

表3 不设内拉环的索穹顶杆件内力计算用表 ($f/L=0.15$)

i	1	2	3	4	5	
m=2	$nT_i = nB_i$	5.71	13.24			
	nV_{i-1}	-1xn	-7.00			
	$2nH_{i-1} \sin(\pi/n)$		11.24			
m=3	$nT_i = nB_i$	8.64	18.31	42.17		
	nV_{i-1}	-1xn	-6.36	-24.48		
	$2nH_{i-1} \sin(\pi/n)$		17.17	34.33		
m=4	$nT_i = nB_i$	11.56	23.84	51.09	115.90	
	nV_{i-1}	-1xn	-6.19	-22.12	-70.36	
	$2nH_{i-1} \sin(\pi/n)$		23.03	46.06	92.11	
m=5	$nT_i = nB_i$	14.47	29.50	61.52	131.95	295.21
	nV_{i-1}	-1xn	-6.12	-21.27	-63.90	-183.95
	$2nH_{i-1} \sin(\pi/n)$		28.86	57.72	115.45	230.89

算例2 有一设内拉环的肋环型索穹顶, 跨度 L , 矢高 f , 内环直径 L_0 , 球面穹顶半径 R , 其简化半橧平面桁架尺寸见图10。其中各段脊索水平投影长度相等, 由几何关系可得出

$$\sin\varphi_i = \frac{(m-i)L_0 + iL}{2mR}$$

$$\alpha_i = \frac{\varphi_i + \varphi_{i-1}}{2} = \frac{1}{2} \left[\sin^{-1} \left[\frac{(m-i)L_0 + iL}{2mR} \right] + \sin^{-1} \left[\frac{(m-i+1)L_0 + (i-1)L}{2mR} \right] \right] \quad (16)$$

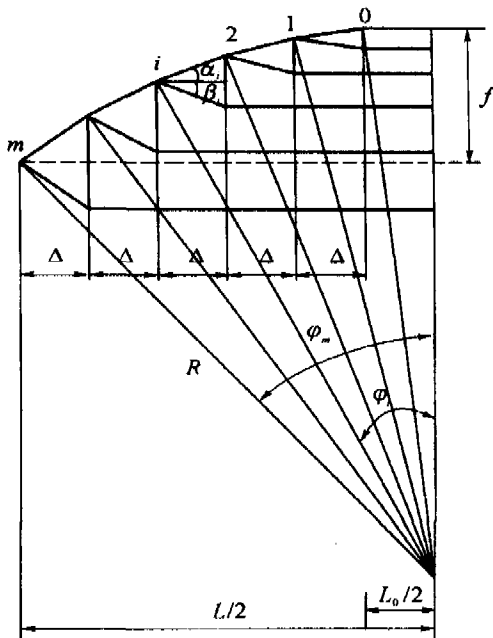


图10 设有内拉环的简化半橢平面桁架尺寸

当 $\beta_i = \alpha_i$ 时，将公式(16)代入公式(13')、(14')可得各类杆件内力。为便于直接应用，下面对 $f/L=0.1, 0.15, 0.20, m=2,3,4,5, n \geq 3$ 情况计算 V_0 单位内力-1时的各杆内力，并编制内力计算用表如表4、表5、表6。

表4 设有内拉环的索穹顶杆件内力计算用表 ($f/L=0.1$)

	i	1	2	3	4	5
m=2	nT=nB _i	7.97	16.56			
	nV _{i-1}	-1	-4.96			
	2nH _{i-1} sin(π/n)	7.91	15.81			
m=3	nT=nB _i	10.38	21.15	43.75		
	nV _{i-1}	-1	-4.48	-14.33		
	2nH _{i-1} sin(π/n)	10.33	20.67	41.34		
m=4	nT=nB _i	12.22	24.72	50.40	103.70	
	nV _{i-1}	-1	-4.16	-12.85	-35.44	
	2nH _{i-1} sin(π/n)	12.18	24.36	48.73	97.46	
m=5	nT=nB _i	13.68	27.56	55.82	113.69	232.98
	nV _{i-1}	-1	-3.92	-11.82	-31.94	-81.60
	2nH _{i-1} sin(π/n)	13.64	27.28	54.56	109.11	218.23

表5 设有内拉环的索穹顶杆件内力计算用表 ($f/L=0.15$)

	i	1	2	3	4	5
m=2	nT=nB _i	5.55	12.09			
	nV _{i-1}	-1	-5.21			
	2nH _{i-1} sin(π/n)	5.45	10.91			
m=3	nT=nB _i	7.24	15.06	32.50		
	nV _{i-1}	-1	-4.58	-15.27		
	2nH _{i-1} sin(π/n)	7.17	14.34	28.69		
m=4	nT=nB _i	8.53	17.46	36.41	77.75	
	nV _{i-1}	-1	-4.21	-13.31	-38.08	
	2nH _{i-1} sin(π/n)	8.47	16.94	33.89	67.79	
m=5	nT=nB _i	9.55	19.40	39.86	82.99	175.66
	nV _{i-1}	-1	-3.96	-12.08	-33.40	-88.14
	2nH _{i-1} sin(π/n)	9.50	19.00	37.99	75.98	151.95

表6 设有内拉环的索穹顶杆件内力计算用表 ($f/L=0.2$)

	i	1	2	3	4	5
m=2	nT=nB _i	4.40	10.22			
	nV _{i-1}	-1	-5.56			
	2nH _{i-1} sin(π/n)	4.29	8.58			
m=3	nT=nB _i	5.77	12.29	28.17		
	nV _{i-1}	-1	-4.69	-16.65		
	2nH _{i-1} sin(π/n)	5.68	11.36	22.72		
m=4	nT=nB _i	6.80	14.12	30.29	68.27	
	nV _{i-1}	-1	-4.27	-13.89	-41.99	
	2nH _{i-1} sin(π/n)	6.73	13.46	26.91	53.82	
m=5	nT=nB _i	7.62	15.62	32.65	69.97	155.50
	nV _{i-1}	-1	-3.99	-12.41	-35.32	-97.90
	2nH _{i-1} sin(π/n)	7.55	15.10	30.20	60.41	120.81

由表1-3和表4-6可知，随矢跨比增加，索穹顶结构中的脊索、斜索和环索内力明显减小，而压杆内力稍有增加。由于 $\beta_i = \alpha_i$ ，对同一类索或压杆，每递增一圈，其内力要增加一倍以上，其中环索内力正好增加一倍。对应相同矢跨比。设有内拉环的索穹顶结构各类相应杆件内力比不设内拉环的肋环型索穹顶内力小得多。

5. 结论

考虑到肋环型索穹顶是一种轴对称结构，本文提出了确定该种结构初始预应力分布的快速算法。该方法从节点平衡关系入手推导了各类杆件内力一般性计算公式。文章还对特定参数的索穹顶给出了内力计算用表，分析了不设有内拉环的索穹顶各类杆件预应力分布的一般规律。通过本文提供的分析方法、计算公式和内力计算用表，可方便快速的确定肋环型索穹顶结构的初始预应力分布，为该类结构的进一步设计和力学性能分析提供了基础。

参考文献

[1] R B Fuller. Tensile-Integrity Structures[P]. US Patent 3, 063,521, 1962.

[2] D H Geiger. The design and construction of two cable domes for the Korea Olympics[A]. Shells, Mem-branes and Space Frame, Proceedings of IASS International Symposium[C], 1986: 265-272.

[3] M P Levy. Georgia dome and beyond achieving light weight-longspan structures[A]. Proceedings of IASS-ASCE International Symposium[C], 1994:560-562.

[4] 钱若军. 张力结构形状判定评述[A]. 新型空间结构论文集[C]. 杭州: 浙江大学出版社, 1994:299-312.

[5] 刘开国. 拉索穹顶结构在轴对称荷载作用下的计算[J]. 建筑结构学报, 1993(5):28-36.