

基于时效分析理论的预应力混凝土结构分析

黄 侨¹ 吴红林¹ 王宗林²

(1.哈尔滨工业大学交通科学与工程学院 哈尔滨 150090 2.同济大学桥梁工程系 上海 200092)

摘 要:以截面平衡方程和结构平衡方程为基础,通过综合考虑混凝土的收缩徐变及预应力钢束松弛等时效因素对预应力混凝土结构的影响,提出了综合计算时效影响的时效分析数值算法。运用这一方法,可以完成对预应力混凝土结构从施工到运营以至整个设计使用期内,任意时刻梁体任意截面的应力、挠度的长期预测,这一理论已得到实验验证,并在实际桥梁工程中得到应用。

关键词:预应力 混凝土结构 时效分析 长期性能

大跨径预应力混凝土桥梁由于时效因素的影响,其力学性能本身是随时间而变化的^[1]。作为复合结构,在进行时效分析时,必须考虑预应力钢束和混凝土的相互作用,同时还应考虑各截面之间的变形影响^[2]。传统的计算方法求解过程中需要不断修正总刚度,从而使分析效率受到了影响^[3]。笔者综合考虑了预应力钢束和混凝土的时效作用,从截面内力平衡入手,计算每一纤维层混凝土因时效因素引起的应变,并由结构平衡方程求出计入了上述时效影响的内力和变形。从而可算出从时间零点到运营若干年后任一时刻任一截面任一点的应力、应变及挠度^[4]。

1. 时效分析的基本理论与方法

1.1 时效分析基本理论

由混凝土收缩、徐变引起的结构变形或结构次内力的计算,进行精确分析是比较困难的。即使能够建立起复杂的偏微分方程组,求解也是非常困难的^[5]。时效分析理论以数值计算为基础,引入以下基本假设:①视混凝土、钢材为理想弹性材料,混凝土的弹性模量为常数;②截面变形符合平截面假设;③采用线性徐变理论;④材料的时效因素(例如徐变、收缩、松弛)的本构方程均为已知;⑤当考虑温度影响时,截面上温度的分布模式应为已知。

1.1.1 截面上的应力、应变关系

任取一梁段截面(见图1a),假设在所有外部荷载及混凝土收缩、徐变和钢束松弛共同

作用下,该截面底边($x=0$)处的最终实际应变值为 ϵ_0 ,单元梁段挠曲变形后的实际曲率为 χ (图1b中为负),则截面沿梁高任一点 x 处的实际应变为(见图1b)

$$\epsilon_{act} = \epsilon_0 - \chi x \quad (1)$$

设任一高度 x 处的纤维层在无约束条件下,因混凝土收缩、徐变所产生的应变为 ϵ_f (见图1c),钢束由松弛影响引起的应变为 ϵ_{sf} ,这些应变统称为自由应变。自由应变中亦可以包括由温度引起的应变增量。与截面各纤维层弹性应力相对应的应变为 ϵ_σ ,由下式确定(见图1d):

$$\epsilon_\sigma = \epsilon_f - \epsilon_{act} \quad (2)$$

沿截面高度 x 处混凝土层及预应力钢束的应力、应变可分别由下式给出:

$$\epsilon_{act} = \epsilon_0 - \chi x, \quad \sigma_c = E_c \epsilon_0 = E_c (\epsilon_f - \epsilon_0 + \chi x) \quad (3)$$

$$\epsilon_{sact} = \epsilon_0 - \chi x, \quad \sigma_s = E_s \epsilon_{s0} = E_s (\epsilon_{sf} - \epsilon_0 + \chi x_s) \quad (4)$$

式中: E_s , E_c 分别为预应力钢束、混凝土的弹性模量; x_s , ϵ_{s0} 分别为钢筋层的高度及其相应位置的应变; χ , ϵ_0 为待求量,由1.1.2中的截面平衡方程可求得。

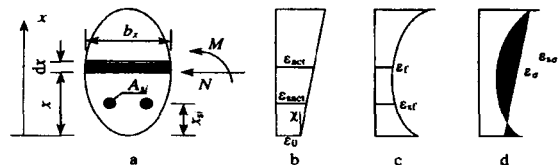


图1 截面应力、应变关系

1.1.2 截面平衡方程的建立

对于预应力混凝土桥梁,截面上一般作用

着弯矩M和轴力N（此处不考虑剪力Q），由于混凝土应力和钢束应力的合力应与截面内力相平衡，因此有如下内力平衡关系：

（1）水平力平衡

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \left[\int_h dA + (m-1) \sum_{i=1}^{n_s} A_{si} \right] - \chi \left[\int_h x dA + (m-1) \sum_{i=1}^{n_s} x_{si} A_{si} \right] \\ = \int_h \varepsilon_r dA + (m-1) \sum_{i=1}^{n_s} \varepsilon_{si} A_{si} - N/E_c \end{aligned} \quad (5)$$

式中：dA为截面上某一水平层的微面积， $dA=b_x dx$ ， b_x 为截面高度方向的宽度； n_s 为截面内预应力钢束根数； A_{si} 为第i束预应力钢束的截面面积； ε_{si} 为第i束预应力钢束的应变；N为截面上由荷载引起的轴力，对于无轴力作用的构件取 $N=0$ ； x_{si} 为第i束预应力钢束重心的高度； $m=E_s/E_c$ 。

（2）弯矩平衡（对截面底边）

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \left[\int_h x dA + (m-1) \sum_{i=1}^{n_s} x_{si} A_{si} \right] - \chi \left[\int_h x^2 dA + (m-1) \sum_{i=1}^{n_s} x_{si}^2 A_{si} \right] \\ = \int_h x \varepsilon_r dA + (m-1) \sum_{i=1}^{n_s} x_{si} \varepsilon_{si} A_{si} - \left[(M+Nx_c) / E_c \right] \end{aligned} \quad (6)$$

式中：M为截面上由荷载引起的弯矩。

联立式（5），（6），便可求得式（3），

（4）中的待求量 χ 和 ε_0 ，为求解方便，记 A_0 为换算截面面积， A_1 为换算截面对底边的一次矩， A_2 为换算截面对底边的二次矩。

$$\zeta = \int_h \varepsilon_r dA + (m-1) \sum_{i=1}^{n_s} \varepsilon_{si} A_{si}, \eta = \int_h x \varepsilon_r dA + (m-1) \sum_{i=1}^{n_s} x_{si} \varepsilon_{si} A_{si} \quad (7)$$

求解由式（5）和式（6）构成的方程组，得

$$\chi = \frac{1}{A_0 A_2 - A_1^2} \left[A_1 \zeta - A_0 \eta + \frac{A_0 M}{E_c} \right], \varepsilon_0 = \frac{1}{A_0 A_2 - A_1^2} \left[A_2 \zeta - A_1 \eta + \frac{A_1 M - A_2 N}{E_c} \right] \quad (8)$$

将求得的 χ 和 ε_0 代入式（3），（4）即可求得截面上任意点混凝土及钢束的应变、应力。

1.2 截面自由应变分析

1.2.1 混凝土徐变应变

设在 t_n 时刻混凝土截面的自由应变 $\varepsilon_f|_{t=t_n}$ 由图1c给出。当时间从 t_n 到 t_{n+1} 时，即在 $\Delta t=t_{n+1}-t_n$ 时间段内，混凝土因徐变产生的应变增量为 $\Delta \varepsilon_c$ 。

于是在 t_{n+1} 时刻，截面上新的自由应变为：

$$\varepsilon_f|_{t=t_{n+1}} = \varepsilon_f|_{t=t_n} - \Delta \varepsilon_c \quad (9)$$

式中： $\varepsilon_f|_{t=t_n}$ 为 t_{n+1} 时刻截面上新的自由应

变。重复上述计算，可求出经过每个时间段后截面上任意位置处混凝土新的自由应变。

1.2.2 混凝土的收缩应变

混凝土的收缩分析类似于徐变分析，因此有

$$\varepsilon_f|_{t=t_{n+1}} = \varepsilon_f|_{t=t_n} - \Delta \varepsilon_{sh} \quad (10)$$

式中： $\Delta \varepsilon_{sh}$ 为 $\Delta t=t_{n+1}-t_n$ 时间段内混凝土因收缩产生的应变增量。

1.2.3 预应力钢束的松弛应变

预应力钢束的松弛分析基于两个基本条件，其一是已知钢材的松弛系数R与时间t的关系曲线，其二是已知各预应力束的初始应变 ε_{sini} 。在时段 $\Delta t=t_{n+1}-t_n$ 内，钢束中的松弛增量为：

$$\Delta \varepsilon_R = \left[R|_{t=t_{n+1}} - R|_{t=t_n} \right] \varepsilon_{sini} \quad (11)$$

该松弛增量作为对 t_n 时刻钢束自由应变的修正。于是 t_{n+1} 时刻钢束的自由应变为：

$$\varepsilon_{sf}|_{t=t_{n+1}} = \varepsilon_{sf}|_{t=t_n} - \Delta \varepsilon_R \quad (12)$$

1.2.4 温度应变

温度 θ 引起的自由应变按截面某一层的温度相对于合龙温度或混凝土浇筑温度 θ_0 的温度差考虑。即 $\Delta \varepsilon_\theta = \alpha (\theta|_{t=t_n} - \theta_0)$ 。在 t_n 到 t_{n+1} 时段内由于温度变化在截面某一混凝土纤维层或钢束中引起的自由应变可按式计算：

$$\varepsilon_\theta|_{t=t_{n+1}} = \varepsilon_\theta|_{t=t_n} - \Delta \varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta|_{t=t_n} - \alpha (\theta|_{t=t_{n+1}} - \theta|_{t=t_n}) \quad (13)$$

在 $t=t_{n+1}$ 时刻，截面上某一混凝土纤维层或钢束层中的自由应变可分别按式（14）、（15）计算：

$$\varepsilon_f|_{t=t_{n+1}} = \varepsilon_f|_{t=t_n} - \Delta \varepsilon_c - \Delta \varepsilon_{sh} - \Delta \varepsilon_\theta \quad (14)$$

$$\varepsilon_{sf}|_{t=t_{n+1}} = \varepsilon_{sf}|_{t=t_n} - \Delta \varepsilon_R - \Delta \varepsilon_\theta \quad (15)$$

1.3 时效分析理论在矩阵位移法中的实现

1.3.1 自由应变引起的单元等效节点荷载

任取一直杆单元，设在 t_n 时刻杆内已有初始自由应变 $\varepsilon_f|_{t=t_n}$ ，在从 t_n 到 t_{n+1} 时间内，杆内自由应变的增量为 $\Delta \varepsilon_f$ ，需计算由 $\Delta \varepsilon_f$ 引起的单元在 Δt 时间段内的内力增量，见图2。

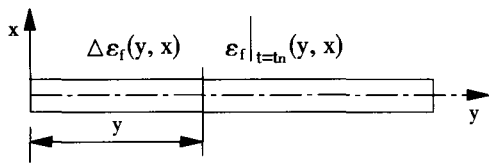


图2 单元自由应变

利用公式(8), 令M, N等于零, 得

$$\begin{bmatrix} A_0 - A_1 \\ A_1 - A_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \zeta \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (16)$$

式中: ζ, η 中的自由应变为从 t_n 到 t_{n+1} 时间段内自由应变的增量 $\Delta\varepsilon_f$ 。

求解式(16), 所得 ε_0, χ 即为自由应变引起的单元某截面 y 处的梁底应变和变形曲率。

$$\chi = [A_1 \zeta - A_0 \eta] / [A_0 A_2 - A_1^2], \quad \varepsilon_0 = (A_0 \chi + \zeta) / A_0 \quad (17)$$

若单元内任一截面的自由应变 $\varepsilon_f(y, x)|_{t=t_n}$ 及自由应变增量 $\Delta\varepsilon_f$ 均已确定, 利用公式(14)可求出单元任一截面的变形 $\varepsilon_0(y)$ 和 $\chi(y)$ 。取基本体系如图3所示。

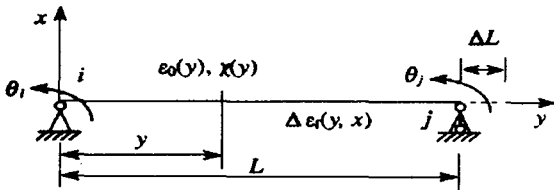


图3 位移法基本体系

图中结构各截面 y 处的变形 $\varepsilon_0(y)$ 和 $\chi(y)$ 均已确定, 由此可得出 i 端转角 θ_i 和 j 端转角 θ_j 及杆件的伸长 ΔL 为

$$\begin{cases} \theta_i = - \int_L \left[1 - \frac{y}{L} \right] \chi(y) dy \\ \theta_j = \int_L \frac{y}{L} \chi(y) dy \\ \Delta L = \int_L \left[\varepsilon_0(y) - \chi_c \chi(y) \right] dy \end{cases} \quad (18)$$

由式(18)可直接写出由自由应变增量 $\Delta\varepsilon_f$ 引起两端固定杆单元的节点荷载向量为

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} N_i \\ Q_i \\ M_i \\ N_j \\ Q_j \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} EA \Delta L / L \\ 6EI(\theta_i + \theta_j) / L^2 \\ 2EI(2\theta_i + \theta_j) / L \\ -EA \Delta L / L \\ -6EI(\theta_i + \theta_j) / L^2 \\ 2EI(\theta_i + 2\theta_j) / L \end{Bmatrix} \quad (19)$$

1.3.2 结构平衡方程的建立及求解

对于从 t_n 到 t_{n+1} 时间段内由自由应变增量引起的等效节点荷载, 利用公式(18)和式(19)求出 $\{F\}^e$, 进行坐标转换后叠加到总荷载向量 $\{P\}$ 中。最后得到结构平衡方程仍可具有如下形式:

$$[K]\{X\} + \{P\} = \{0\} \quad (20)$$

式中: $\{X\}$ 为赘余力向量。

解方程(20), 可得到结构任一截面计入混凝土收缩、徐变及预应力钢束松弛等时效影响的位移、内力, 将其代入公式(8)后可求出该截面的变形 $\varepsilon_0(y)$ 和 $\chi(y)$, 由此得到截面上的应力、应变。

1.4 时效分析理论在力法中的实现

1.4.1 基本结构的选取

取图4所示的 $n+1$ 跨连续梁的一部分作为力法计算的基本体系。由于连续梁中轴力 $N=0$, 故式(5)变为式(21)

$$\begin{cases} \chi = \frac{1}{A_0 A_2 - A_1^2} \left[A_1 \zeta - A_0 \eta + \frac{A_0 M}{E_c} \right] \\ \varepsilon_0 = \frac{1}{A_0 A_2 - A_1^2} \left[A_2 \zeta - A_1 \eta + \frac{A_1 M}{E_c} \right] \end{cases} \quad (21)$$



图4 力法基本体系

变形后的实际曲率为 χ , 可分解为两部分, 其中一部分与截面的自由应变有关, 而另一部分与截面弯矩有关, 即写成式(22)的形式。

$$\chi = \chi(\varepsilon_f) + \chi(M) \quad (22)$$

公式(22)中的截面弯矩 M 可以根据力法原理写成如下形式:

$$M = M_0 + X_1 m_1 + X_2 m_2 + \dots + X_n m_n \quad (23)$$

式中： M_0 为基本结构上作用的弯矩； X_i 为结构的赘余力； m_i 为赘余力 $X_i=1$ 在基本结构上引起的弯矩。

由截面几何参数之间的关系可以导出

$$A_0 / (A_0 A_2 - A_1^2) = 1 / I_{xx}$$

式中： I_{xx} 为截面惯性矩。

1.4.2 结构平衡方程的建立及求解

n 次超静定结构在赘余力方向的变形协调典型方程表示如下：

$$\varphi_i = \int \chi m_i = 0, \quad i=1, \dots, n \quad (24)$$

将公式(24)展开, 则有

$$\begin{aligned} \int \chi(\varepsilon_{fi}) m_i d_s + \int [(M_0 + X_1 m_1 + X_2 m_2 + \dots + X_n m_n) / E_c I_{xx}] m_i d_s &= 0 \\ \int \chi(\varepsilon_{fi}) m_i d_s + \int [(M_0 + X_1 m_1 + X_2 m_2 + \dots + X_n m_n) / E_c I_{xx}] m_i d_s &= 0 \\ \vdots \\ \int \chi(\varepsilon_{fi}) m_i d_s + \int [(M_0 + X_1 m_1 + X_2 m_2 + \dots + X_n m_n) / E_c I_{xx}] m_i d_s &= 0 \end{aligned}$$

式中： d_s 表示沿跨长积分。写成矩阵形式为

$$\{U\} + [F] \{X\} + E_c \{W\} = 0 \quad (25)$$

由式(27)可求得赘余力向量 $\{X\}$ ：

$$\{X\} = -[F]^{-1} (\{U\} + E_c \{W\}) \quad (26)$$

由于向量 $\{W\}$ 也是时间的函数, 因此方程(26)本身也是时间的函数, 应在需要的时间计算点求解。

2. 对大跨径预应力混凝土桥梁的时程分析

2.1 施工阶段时效分析

施工中可以从时程上划分为若干个时间段, 为计算从某个时刻 t_i 到 t_{i+1} 时段结构的时间效应, 还可将 $[t_i, t_{i+1}]$ 离散成若干个小时时间段, 认为在这些小时间段内, 混凝土及钢束时效影响在常应力下发生。

在 $t_j + \Delta t$ 时刻, 结构的最终内力及最终累积自由应变为

$$F_{j+1} = F_j + \Delta F_j, \quad \varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j + \Delta \varepsilon_j$$

F_{j+1} 和 ε_{j+1} 作为 $t_j + \Delta t$ 时刻的初始内力和累积自由应变进行下一时段的计算。重复以上的计算过程, 便可求得结构在 t_{i+1} 时刻的时间效应。

2.2 运营阶段长期性能分析

桥梁施工结束后, 结构内部已经存储了自由应变 ε_{f0} 及内力 F_0 。随着时间的推移, 自由应变 ε_{f0} 不断变化, 结构的内力 F_0 和挠度也处在不断的变化之中。其计算方法与施工阶段基本相同, 不再赘述。

3. 实桥分析验证

三股线高架桥是绥-满公路上的1座5跨连续刚构桥, 采用悬浇法施工。施工阶段的单元划分示意如图5。施工阶段主要是挠度的计算。计算结果表明, 在施工阶段, 混凝土的收缩、徐变及钢束松弛对悬浇块前端挠度影响较小, 但它对后续节段的累计影响是非常大的。在悬浇结束后, 所有时效因素的共同作用使得悬浇末端的挠度比不计其影响的挠度增大了70% (6.01cm)。表1给出了施工最后阶段线形控制情况。从表1中可见, 最终合龙时合龙段的实际高程和设计高程差值在13mm之内。实际合龙时, 合龙段的两端相对高差皆小于6mm, 均满足了设计要求, 取得了很好的控制效果。实桥计算时, 混凝土的收缩、徐变采用苏洪清建议的公式^[6]。根据该方法预测, 桥梁运营5年后, 其主跨跨中挠度将增加2cm。

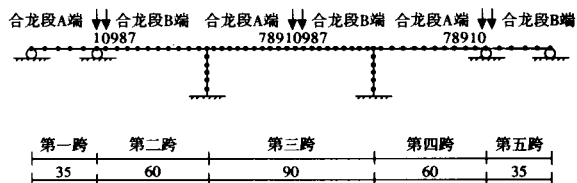


图5 三股线高架桥布置

表1 全桥施工最后阶段线形控制结果

位置	块号	混凝土浇筑后高程①	钢束张拉后高程②	设计高程③	绝对高程差④=③-②	合龙端相对高程差⑤中(B-A)
第二跨	10 A端	541.601	541.670	541.680	0.010	0.003
	B端	541.592	541.634	541.647	0.013	
	9	541.478	541.510	541.526	0.016	
	8	541.303	541.328	541.344	0.016	
	7	541.070	541.091	541.100	0.009	
第三跨	7	539.695	539.714	539.727	0.013	0.004
	8	539.759	539.781	539.790	0.009	
	9	539.767	539.802	539.792	-0.010	
	10 A端	539.648	539.726	539.733	0.007	
	B端	539.606	539.656	539.667	0.011	
第四跨	9	539.499	539.533	539.546	0.013	0.006
	8	539.330	539.355	539.364	0.009	
	7	539.097	539.114	539.120	0.006	
	7	537.713	537.735	537.747	0.012	
	8	537.776	537.802	537.810	0.008	
第四跨	9	537.784	537.817	537.812	-0.005	0.006
	10 A端	537.688	537.741	537.753	0.012	
	B端	537.660	537.714	537.720	0.006	

(下转第33页)

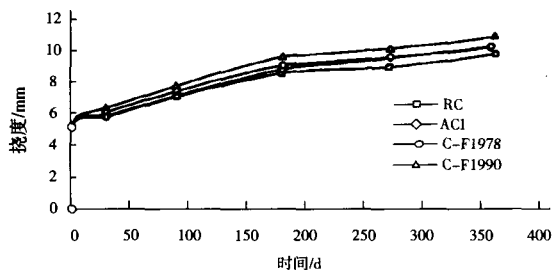


图8 普通组合梁的跨中挠度—时间曲线

从图7、8中试验值和理论值的对比可知,预应力组合梁与普通组合梁的时随分析结果与试验值吻合较好。

4. 结语

(1)预应力组合梁的跨中挠度随时间不断增大,而且挠度增加随时间呈递减趋势。预应力的施加能减小组合梁的跨中挠度,却加快了跨中挠度的增加速度。栓钉间距的增大会加大组合梁的跨中挠度,但对组合梁刚度的影响不大。

(2)中国现行《钢结构设计规范》(GB50017,送审稿)中有关组合梁长期挠度的计算方法偏于不安全。笔者建议,预应力组合梁和普通组合梁的长期挠度分别取其短期挠度的3.1和2.0倍。

(3)长期荷载作用下,预应力筋应变随时间逐渐下降,但下降的幅度随时间逐步减小。

(4)预应力组合梁与普通组合梁的钢梁下翼

缘应变具有相似的变化趋势,两者的应变值在加载后都逐步增大,约在加载后180d达到最大,随后应变下降。这可能是由于环境温度的影响所致。

(5)在滑移方面,预应力组合梁与普通组合梁在一年持荷荷载下,钢梁和混凝土翼缘之间均未发生滑移。预应力组合梁在张拉预应力筋时出现很小的滑移量,最大为0.05mm。相比之下,栓钉间距较小的PC-1试件的滑移量稍小。

(6)基于龄期调整有效模量法,推导了预应力组合梁的徐变刚度矩阵和徐变力向量,编制了预应力组合梁时随分析程序,应用该程序的计算值与试验结果吻合较好。

参考文献

- [1] ALFARABISHARIF,SALAHEI-DINTAHERF,BAUSPK.Time-dependent losses in prestressed continuous composite beams [J].J.Struct.Div.,ASCE,1993,119(11):3151—3168.
- [2] LUIGINODEZI,GRAZIANOLEONI,ANGELOM-ARCELLOTARANTINO.Time-dependent analysis of prestressed composite beams[J].J.Struct.Div.,ASCE,1995,121(4):621—633.
- [3] ANDREADALL'ASTA,LUIGINODEZI.Nonlinear behavior of externally prestressed composite beams:analytical model [J].J.Struct.Div.,ASCE,1998,124(5):588—597.
- [4] 宗周红,车惠民.预应力钢—混凝土组合梁有限元非线性分析[J].中国公路学报,2000,13(2):48—51.
- [5] XUEWei-chen,LLjie.Studies on performance of pre-stressed steel-concrete composite beams [A].26th Our World in Concrete & Structures [C].Singapore:CI-PREMIERPTLTD,2001.677—684.
- [6] 周履,陈永春.收缩徐变[M].北京:中国铁道出版社,1994.
- [7] 薛伟辰.现代预应力结构设计[M].北京:中国建筑工业出版社,2003.

(上接第29页)

4. 结论

(1)笔者提出的时效分析理论,综合考虑了混凝土收缩、徐变,预应力钢束松弛以及温度等时效因素影响,从截面内力平衡方程入手,结合结构外部平衡方程,真实地反映了混凝土—预应力钢束共同作用的机理和钢束松弛的特性以及各截面之间的相互影响。在线弹性徐变理论的假设下,其计算精度仅取决于时效本构模型的精度和时间段划分的大小。

(2)将矩阵位移法、力法应用于时效理论,使得结构求解更加简便且易于理解。利用该方法可很容易地将时效分析理论应用于连续梁桥、连续刚构桥及斜拉桥等复杂桥型中,并完成从施工到运营阶段任意时刻应力、应变、内力、变形等状态的计算。

(3)本文提出的基于时效理论的有限元数值计算方法,不需要存储单元的应力应变历史,仅需存储一个时间段内的应变增量和总的变形值,更适合于采用传统的杆系有限元法在微机上进行计算。基于上述时效理论编制的程序证明了计算理论及模型的正确性和实用性。

参考文献

- [1] 黄侨.大跨径PC桥梁结构长期性能分析[A].92全国桥梁结构学术大会论文集[C].上海:同济大学出版社,1992.808—814.
- [2] 金问鲁.预应力混凝土弹性—徐变状态统一计算理论[M].北京:中国铁道出版社,1990.
- [3] 范立础.预应力混凝土连续梁桥[M].北京:人民交通出版社,1988.
- [4] HUANGQiao.Report on program development for the analysis of continuous prestressed concrete bridge[R].London:University of London, Queen Maryand Wesfield College,1990.
- [5] 唐崇钊.混凝土的徐变力学与试验技术[M].北京:水利电力出版社,1982.
- [6] 苏洪涛.加筋混凝土收缩徐变的试验研究[J].桥梁建设,1994,(4):3—10.