

# 按共同变形原理计算地锚粘结型锚头内力分布

王建宇 牟瑞芳

**内容提要** 本文对地锚粘结型内锚头承受拉拔力引起的围岩变形进行了分析,给出了考虑锚杆、浆体和围岩间相互作用的锚头内力分布和传递规律的积分方程表达及其数值解,为正确地分析地锚在岩土体中的锚固特性,发展锚固工程的设计方法提供了工具。

## 1. 引言

地锚的抗拔力计算是岩土锚固工程设计中一个关键技术问题。工程实践和试验研究表明,粘结接式锚头的内力沿杆长的分布是不均匀的,杆体轴力和剪力集度均向根部衰减。关于这种衰减规律的计算,以往多采用局部变形假定,即用一系列独立作用的“切向弹簧”来描述“锚固体”同围岩之间的关系,得出杆轴力和剪力的分布规律:

$$P = P_0 \frac{\text{sh}[\beta(h-l-z)]}{\text{sh}(\beta l)}$$

$$q = \beta P_0 \frac{\text{ch}[\beta(h-l-z)]}{\text{sh}(\beta l)} \quad (1)$$

式中:  $l$ ——锚固段长度  
 $h$ ——锚头埋深  
 $z$ ——坐标  
 $P$ ——锚杆中轴力  
 $P_0$ ——拉拔力

$q$ ——单位长度锚固体上的剪力集度

$$\beta^2 = \frac{k_s}{A_b E_b} = \frac{4k_s}{\pi d_b^2 E_b}$$

其中:  $d_b$ ——锚固体直径

$E_b$ ——锚固体变形模量

$K_s$ ——浆体的综合剪切刚度

上述计算方法难以正确反映围岩特性(变形模量)对锚头内力分布的影响。为了考虑杆体、浆体和围岩的共同作用,通常要采用有限元和FLAC(Fast Lagrangian Analysis of Continua)等数值计算方法。

本文对锚头承受拉拔力引起的围岩变形进行了分析,给出了考虑杆体、浆体和围岩共同作用的粘结式锚头内力分布和传递规律的积分表达及其离散格式,为正确地分析锚在岩土体中的锚固特性,发展锚固工程的设计方法提供一种工具。

## 2. 基本假定

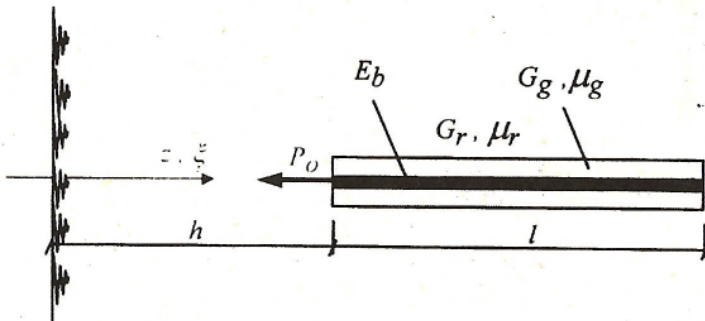


图1 按共同变形假定分析锚头内力

视杆体为一维单元,假定由浆体变形特性所决定的杆体和围岩之间的相对位移,表达为:

$$q = k_{sg}(\omega_r - \omega_b) \quad (2)$$

$k_{sg}$ 与(1)式中的综合切向刚度系数 $K_s$ 不同,此处系数 $k_{sg}$ 仅反映浆体的变形,而没有将岩体变形“综合”进去,可称为“浆体切向刚度系数”。(图1)符号规定:

- 锚杆材料弹性模量 $E_b$
- 浆体剪切模量 $G_g$ ,泊松比 $\mu_g$
- 岩土体剪切模量 $G_r$ ,泊松比 $\mu_r$
- 内锚段长度 $l$
- 杆体半径 $R_b$ ,横截面积 $A_b$
- 浆体半径 $R_g$
- 埋深 $h$
- 杆体内轴力 $P$
- 剪力集度 $q$
- 反映浆体变形特性的切向刚度系数 $k_{sg}$
- 锚杆位移 $\omega_b$

### 3. 岩土体的位移表达式

根据弹性理论,在半无限空间中,如(图2)当 $A(0,0,\xi)$ 点作用一集中力 $N$ 时,点 $B(x,y,z)$ 的位移:

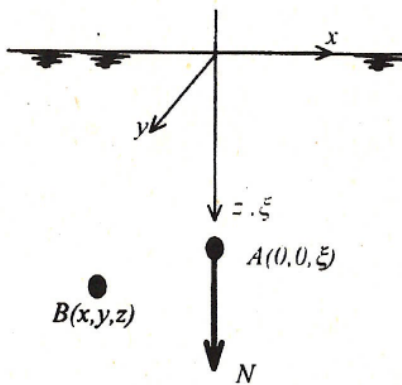


图2.集中荷载引起的位移

$$\omega(r, z, \xi) = \frac{N}{16\pi G_r(1-\mu_r)} \left[ \frac{3-4\mu_r}{R_1} + \right.$$

$$\frac{8(1-\mu_r)^2 - (3-4\mu_r)}{R_2} + \frac{(z-\xi)^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\mu_r)(z+\xi)^2 - 2\xi z}{R_2^3} + \frac{6\xi z(z+\xi)^2}{R_2^5} \left. \right]$$

$$\text{式中: } R_1 = [r^2 + (z-\xi)^2]^{1/2}$$

$$R_2 = [r^2 + (z+\xi)^2]^{1/2}$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

因此,当作用在锚杆杆体上的荷载通过浆体剪力传到岩土体时引起的岩体位移可表为坐标 $Z$ 的函数

$$\omega_r = - \int_h^{h+l} K(R_g, z, \xi) q(\xi) d\xi$$

(3)

$$\text{式中: } K(R_g, z, \xi) = \frac{1}{16\pi G_r(1-\mu_r)} \left[ \frac{3-4\mu_r}{R_1} + \frac{8(1-\mu_r)^2 - (3-4\mu_r)}{R_2} + \frac{(z-\xi)^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\mu_r)(z+\xi)^2 - 2\xi z}{R_2^3} + \frac{6\xi z(z+\xi)^2}{R_2^5} \right] \quad (4)$$

式中 $R_1, R_2, R_3$ 令(3-2)式中 $r = R_g$ 即得。

### 4. 状态方程及求解

$$\text{设锚杆位移为 } \omega_b \quad \text{则: } \frac{d\omega_b}{dz} = \epsilon_b = \frac{P(z)}{E_b A_b}$$

(5)

$$\text{注意到 } q = - \frac{dP}{dz}$$

$$\text{代入得 } \omega_r - \omega_b = - \frac{1}{k_{sg}} \frac{dP}{dz}$$

$$\text{对} z \text{微分 } \frac{d\omega_r}{dz} - \frac{d\omega_b}{dz} = - \frac{1}{k_{sg}} \frac{d^2P}{dz^2} \quad (6)$$

根据附录中推导,并考虑边界条件 $z = h, P = P_0; z = h+l, P = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_r}{dz} &= \frac{d}{dz} \int_h^{h+l} K(R_g, z, \xi) dP = \int_h^{h+l} \frac{\partial}{\partial z} K(R_g, z, \xi) dP \\ &= -P_0 \frac{\partial}{\partial z} K(R_g, z, h) - \int_h^{h+l} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \xi} K(R_g, z, \xi) P(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (7)$$

将(3-4)及(3-6)代入(3-5)得

$$P(z) + \lambda \int_h^{h+l} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \xi} K(R_b, z, \xi) P(\xi) d\xi = \frac{\lambda}{k_{sg}} \frac{d^2P(z)}{dz^2} - P_0$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial z} \cdot K(R_g, z, h) \quad (8)$$

式中  $\lambda = E_b A_b$

$$\Delta \frac{\partial^2}{\partial z \partial \xi} K(R_g, z, \xi) = K_2(R_g, z, \xi)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} K(R_g, z, h) = K_1(R_g, z, h)$$

则积分方程(8)可离散为

$$P_{i+1} + \lambda \Delta \sum_{j=1}^n P_j K_2(R_g, z_i, \lambda_j) - \frac{\lambda}{k_{sg} \Delta^2} (P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}) = -P_0 \lambda K_1(R_g, z_i, h) - P_0 \lambda K_2(R_g, z_i, h) \Delta / 2 \quad i=1 \sim n$$

式中  $\Delta$  为离散分段长度

$$\text{写成矩阵, } [M] \{P\} = \{P_0\} \quad (9)$$

式中:  $\{P_0\} = -\lambda P_0 \{K_1(R_g, z_i, h) + K_2(R_g, z_i, h)\}$ ,

$$[M] = \{I\} + [M_0] + [A]$$

其中  $\{I\}$  为单位矩阵

$$[A] = \frac{\lambda}{\Delta^2 k_{sg}} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

解(9)得  $\{P_i\}$ , 进而求得剪力集度

$$q_i = -\frac{1}{2\Delta} (P_{i+1} - P_{i-1}) \quad i=1 \sim n-1$$

$$q_i = -\frac{1}{\Delta} (P_{i+1} - P_i) \quad i=0$$

$$q_i = -\frac{1}{\Delta} (P_i - P_{i-1}) \quad i=n$$

$$\text{浆体与岩体接触面剪应力 } \tau_{ig} = \frac{q_i}{2\pi R_g}$$

$$\text{杆体和浆体接触剪应力 } \tau_{ib} = \frac{q_i}{2\pi R_b}$$

求杆体位移:

$$\omega_b = -\frac{q}{k_{sg}} + \omega_r = \frac{1}{k_{sq}} \frac{dP}{dz} + \omega_r$$

$$\omega_b(z) = \int_h^{h+1} K(R_g, z, \xi) dP(\xi) + \frac{1}{k_{sg}} \frac{dP(z)}{dz}$$

离散格式:

$$\omega_{bi} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} [K(R_g, z_i, \xi_j) (P_{i+1} - P_{i-1})]$$

$$+ K(R_g, z_i, h) (P_i - P_0) + K(R_g, z_i, h+1) (P_n - P_{n-1}) + \frac{1}{\Delta k_{sg}} R_i \quad (10)$$

$$\text{式中: } R_i = \frac{1}{2} (P_{i+1} - P_{i-1}) \quad i=1 \sim n-1$$

$$R_i = P_{i+1} - P_i \quad i=0$$

$$R_i = P_i - P_{i-1} \quad i=n$$

### 5. 简化情况一忽略浆体的存在

当浆体和岩体弹性模量相近,  $G_r \approx G_g$  时, 可忽略浆体的存在, 采用简化模型, 即认为杆体和围岩介质直接接触, 在界面上有唯一的位移。在这种情况下, (3)式可表为:

$$\omega_r = - \int_h^{h+1} K(z, \xi) q(\xi) d\xi$$

$$\text{式中: } K(z, \xi) = \frac{1}{16\pi G_r (1-\mu_r)} \left[ 1 + \frac{3-4\mu}{z-\xi} + \frac{8(1-\mu)^2 - (3-4\mu_r)}{z+\xi} + \frac{(3-4\mu_r)(z+\xi)^2 + 4\xi z}{(z+\xi)^3} \right]$$

$$(3-5) \text{式即为: } \frac{d\omega_r}{dz} - \frac{d\omega_b}{dz} = 0$$

(3-7)式为:

$$P(z) + \lambda \int_h^{h+1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \xi} K(z, \xi) P(\xi) d\xi = -P_0 \lambda \frac{\partial}{\partial z} K(z, h)$$

$$P_{i+1} + \lambda \Delta \sum_{j=1}^n P_j K_2(z_i, \xi_j) = -P_0 K_1(z_i, h) \quad i=1 \sim n$$

$$[M] \{P\} = \{P_0\}$$

$$\{P_0\} = -\lambda P_0 \{K_1(z_i, h)\}_i$$

$$[M] = \{I\} + [M_0]$$

$$[M_0] = [K_2(z_i, \xi)]_{ij}$$

杆体位移

$$\omega_b(z) = \int_h^{h+1} K(z, \xi) dp(\xi) \text{ 离散格式}$$

$$\omega_{bi} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n-1} [K(z_i, \xi_j) (P_{i+1} - P_{i-1})] + K(z_i, h) (P_1 - P_0) + K(z_i, h+1) (P_n - P_{n-1})$$

### 6. 算例

岩体  $E_r = 1 \times 10^4 \text{MPa}$   $\mu_r = 0.3$

锚杆杆体  $L = 3.00 \text{m}$   $h = 0$   $R_b = 0.011 \text{m}$

$E_b = 2.1 \times 10^5 \text{MPa}$

浆体的切向刚度系数  $k_{sg} = 200 \text{MN/mm}$

按本文提出的计算结果与轴对称FEM解相比较, 二者吻合得较好。[4]



表4 计算结果

结点号	坐标(m)	轴力(KN)		剪力集度(KN/m)	
		FEM解	本文解	FEM解	本文解
1	0.00	48.18	50.00	78.81	71.94
2	0.25	34.59	34.02	52.93	53.30
3	0.50	22.00	23.01	35.70	35.89
4	0.75	15.82	15.60	24.09	24.17
5	1.00	10.08	10.61	16.33	16.28
6	1.25	7.25	7.25	11.06	10.98
7	1.50	4.61	4.97	7.54	7.43
8	1.75	3.29	3.43	5.16	5.05
9	2.00	2.07	2.38	3.59	3.48
10	2.25	1.41	1.65	2.56	2.46
11	2.50	0.80	1.12	1.93	1.82
12	2.75	0.40	0.71	1.59	1.48
13	3.00	0	0	1.51	1.37

参考文献

1. 预应力锚索设计与施工技术规范. 中华人民共和国国家军用使用标准, 1996
  2. Stuart Little John, Rock Anchorage. ISRM News Journal, 1995Spring.
  3. 尾高英雄等, 关于荷载分散型锚杆及周边岩土层剪切应力的研究. 国际岩土锚固工程技术研讨会论文集. 1996, 柳州.
  4. 伍晓军, 全长锚固式锚杆与围岩的相互作用. 铁道部科学研究院硕士学位论文, 1992.
- 本文主要作者: 王建宇研究员, 为铁道部科学研究院西南分院院长、博士生导师。

附录

1 关于岩体位移

$$\omega_z = \int_h^{h+1} K(R_g, z, \xi) [-q(\xi)d\xi] = \int_h^{h+1} K(R_g, z, \xi) \frac{dp}{d\xi} d\xi$$

$$= \int_h^{h+1} K(R_g, z, \xi) dp$$

$$\frac{d\omega_z}{dz} = \frac{d}{dz} \int_h^{h+1} K(R_g, z, \xi) dp = \int_h^{h+1} \frac{\partial}{\partial z} K(R_g, z, \xi) dp$$

$$\text{令 } \mu = \frac{\partial}{\partial z} K(R_g, z, \xi), d\mu = dp$$

$$\int \mu d\mu = \mu \nu - \int \nu d\mu \quad \text{则}$$

$$\frac{d\omega_z}{dz} = \left[ \frac{\partial}{\partial z} K(R_g, z, \xi) P(\xi) \right]_h^{h+1} - \int_h^{h+1} P(\xi) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \xi} K(R_g, z, \xi) d\xi$$

$$= \frac{\partial}{\partial z} K(R_g, z, h+L) \times 0 - \frac{\partial}{\partial z} K(R_g, z, h) \times p_0 - \int_h^{h+1} P(\xi) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \xi} K(R_g, z, \xi) d\xi$$

$$= -P_0 \frac{\partial}{\partial z} K(R_g, z, h) - \int_h^{h+1} P(\xi) \frac{\partial^2}{\partial z \partial \xi} K(R_g, z, \xi) d\xi$$

2. K函数的微分表达式

$$\frac{\partial}{\partial z} K(r, z, h) = (2-A) \frac{z-h}{R_1^3} + (2A-B) \frac{z+h}{R_2^3} - \frac{3(z-h)^3}{R_1^5} - 3A \frac{(z+h)^3}{R_2^5} - \frac{2h}{R_2^3} + 6h \frac{(z+h)(4z-h)}{R_2^5} - \frac{30hz(z+h)^3}{R_1^7}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \xi} K(r, z, \xi) = -\frac{2-A}{R_1^3} + \frac{2A-B-2}{R_2^3} + (15-3A)$$

$$\frac{(z-\xi)^2}{R_1^5} - (15A-3B) \frac{(z+\xi)^2}{R_2^5} - 15 \frac{(z-\xi)^4}{R_1^7} + 15A \frac{(z+\xi)^4}{R_2^7} + \frac{6(4z^2+11z\xi+4\xi^2)}{R_2^5} - \frac{30(z^2+8z\xi+\xi^2)(z+\xi)^2}{R_2^7} + 210z \xi \frac{(z+\xi)^4}{R_2^9}$$

式中,

$$A = 3 - 4\mu \quad B = 8(1-\mu)^2 - (3-4\mu)$$