

# 基于HDMR响应面的结构可靠度计算方法

官 华 张守龙 方继伟

(宁波市交通建设工程试验检测中心有限公司 浙江宁波 315124)

**摘 要:**介绍了响应面法在可靠度分析中的应用进展,提出了一种基于高维模型表示(HDMR)扩展的迭代响应面法。在详述采用HDMR响应面法计算结构可靠度的基本原理后,采用Matlab语言对若干数值算例进行计算,同时给出了其它计算方法的结果以对比分析。结果表明:本文方法具有较高的效率和可靠的精度,在结构可靠度分析中具有一定的实用性。

**关键词:**结构可靠度分析 HDMR 扩展 迭代 响应面法 Matlab

**DOI:** 10.13211/j.cnki.pstech.2017.01.004

## 引言

对于大型复杂结构的可靠度问题,由于较难得到其极限状态方程的准确表达式,通常采用有限元结合Monte-Carlo (M-C) 抽样法、响应面法或随机有限元法进行分析。有限元结合M-C法是一种较为直接的计算方法,但要得到精确解通常要耗费巨大的计算成本。响应面法(RSM)则是一种近似分析方法,其思想是通过少量的试验(抽样)来拟合一个响应面函数作为真实极限状态函数的近似表达式,再基于近似响应面函数进行可靠度求解。该方法作为一种近似方法,有着较高的效率和可靠的精度,但对于非线性程度较高的极限状态函数,其求解精度还有待商榷。随机有限元法(SFEM)则是一种更直接的计算方法,但需要对确定性有限元程序进行改造,而目前要形成一个通用的随机有限元程序尚有一定困难。因此,在实际工程中,响应面法相较于其它两种方法有着更高的效率和实用性,这也使得该方法得以广泛的应用于结构可靠度分析中。

## 1 响应面法的发展

响应面法首次由Box等<sup>[1]</sup>作为一种数理统计工具提出,用于搜寻某种化学过程的优化反应所需要的条件。随后该方法逐渐发展成为结构可靠度分析的常用方法之一。Wong<sup>[2]</sup>首次将响应面法应用于岩土工程中,采用2水平因子设计抽样方法和回归分析得到某边坡极限状态函数的近似方程,并结合M-C抽样求解边坡失效概率。

Faravelli<sup>[3]</sup>则系统地阐述了以空间变量均值为抽样中心的包含交叉项的二次多项式作为响应面函数,并通过方差分析考虑设计变量变异性的影响。作者同样采用了2水平因子设计和最小二乘估计来拟合响应面,并对一个轻水反应堆压力容器进行了可靠度分析。然而,当采用2水平因子试验设计时,要得到一个二阶多项式响应面函数需要进行 $2^N$ 次抽样( $N$ 为随机变量个数),当 $N$ 较大时必然耗费巨大的计算成本,而且以均值为抽样中心所得的响应面可能与真实的极限状态表面不相符。Bucher等<sup>[4]</sup>则提出一种改进的响应面法,即建议采用不含交叉项的二次多项式作为响应面函数,并选取位于标准正态随机变量空间坐标轴上的 $\mu_i$ 与 $\mu_i \pm f\sigma_i$  ( $i=1,2,\dots,N$ )为抽样点(其中 $\mu_i$ 与 $\sigma_i$ 分别为随机变量 $x_i$ 的均值与标准差,并假定 $f=3$ ),再通过回归分析得到响应面函数 $g(x)$ ,并依此求解初始设计点 $X_D$ 。继而用线性插值函数得到一个新的抽样中心点 $X_M$ 并以此获得新的响应面函数,最终根据新的响应面函数求解失效概率。此方法只需要进行 $4N+3$ 次抽样,相比Wong与Faravelli的方法在效率上有明显提高。然而,Rajashekhar等<sup>[5]</sup>在研究中发现Bucher与Bourgund的方法仅对响应面作一次更新是不够的,而且在非线性程度较高时令 $f$ 为常数3不一定能得到精确结果。Liu等<sup>[6]</sup>则对Bucher的方法进行改进,提出了序列响应面法,即对响应面函数进行多次迭代直至可靠指标收敛到一定精度,并首

次将序列响应面法应用于飞机结构可靠度的分析中。佟晓利等<sup>[7]</sup>则将序列响应面法与结构可靠度分析的几何法相结合,并通过一个三跨十二层建筑的平面框架算例分析验证了该方法的精度和效率。Kim等<sup>[8]</sup>则建议使用线性函数替代二次多项式作为响应面函数,并使用梯度投影技术使响应面抽样点更接近原始极限状态表面。Das等<sup>[9]</sup>在Kim与Na的基础上进行改进,先用Kim的方法形成一个线性响应面,然后通过增加二次项来改进线性响应面,并建议在所得二次响应面精度不够的情况下通过增加交叉项并去除一些二次项来适当改进响应面函数。Gayton<sup>[10]</sup>等则将一种新的统计方法应用于响应面法中,即首先设置一个初始试验设计以减小待寻找的设计点区域,然后根据试验进行重新抽样来获得设计点坐标的经验分布,最终利用置信区间确定设计点的位置。Gupta等<sup>[11]</sup>研究了存在多个设计点情况下的响应面法,即通过多次转换坐标系原点并结合Bucher的算法来拟合全局响应面。Kaymaz等<sup>[12]</sup>研究了基于加权回归技术的响应面法,并将其应用于结构可靠度分析中。Kang<sup>[13]</sup>等则采用移动最小二乘法(MLS)来拟合响应面函数,即对于接近设计点的抽样点给予更高的权重,使设计点附近的响应面更接近于极限状态表面。Allaix等<sup>[14]</sup>则提出将原始随机变量坐标系转换为原点位于验算点且主轴为最敏感随机变量的坐标轴,然后在新的坐标系中采用序列响应面法求解失效概率。Guan等<sup>[15]</sup>则研究了响应面法中的 $f$ 值对极限状态函数估计的影响,并建议初次试算时 $f$ 宜选在2~3之间。

然而,上述响应面法虽经过众多学者进行研究改进,但本质上仍然以二次多项式为基础,而该方法仍存在计算精度不足的问题<sup>[16]</sup>。HDMR(High-Dimensional-Model-Representation,高维模型拟合)作为一种获取高维复杂系统的“输入-输出”函数关系的数学方法自Rabitz及其团队<sup>[17]</sup>提出以来得到了广泛的发展和应用,至今已成功应用于大气化学、分子动力学模拟分析等领域中<sup>[18]</sup>。2013年本文作者对HDMR方法在结构参数识别中的应用进行了研究,并取得一定成

果。本文则主要对基于HDMR响应面的结构可靠度求解方法进行研究,并通过算例分析来说明本文方法在结构可靠度求解中的精度、效率以及适用性。

## 2 基于HDMR扩展式的响应面法

### 2.1 HDMR扩展

HDMR为一种获取高维系统的“输入-输出”关系的多元函数逼近方法,其概念首次由Rabitz<sup>[19]</sup>等提出。假定系统包含 $N$ 维输入变量: $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,系统响应变量记为 $g(x)$ 。由于各输入变量对响应变量的影响可能是独立或者耦合的,因此, $g(x)$ 可用HDMR表示:

$$g(x) = g_0 + \sum_{i=1}^N g_i(x_i) + \sum_{i_1 < i_2} g_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) + \dots + \sum_{i_1 < \dots < i_m} g_{i_1 \dots i_m}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}) + \dots + g_{12 \dots N}(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (1)$$

其中 $g_0$ 为常数项,又称为零阶项; $g_i(x_i)$ 为一阶项,表示变量 $x_i$ 独立作用时对响应变量的影响; $g_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$ 为二阶项,表示变量 $x_{i_1}$ 与 $x_{i_2}$ 对于响应变量的耦合影响;更高阶项表示相应的 $m$ 个输入变量共同作用对响应变量的耦合影响; $g_{12 \dots N}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 则表示所有输入变量耦合作用的残余影响量。如果高阶变量耦合效应微弱,由少数低阶项组成的HDMR即可获得响应变量的精确近似 $g(x)$ 。对于实际工程,通常只需一阶或二阶分项函数即可满足精度要求<sup>[19]</sup>:

$$g(x) = g_0 + \sum_{i=1}^N g_i(x_i) \quad (2)$$

$$g^2(x) = g_0 + \sum_{i=1}^N g_i(x_i) + \sum_{i_1 < i_2} g_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \quad (3)$$

其中, $g^1(x)$ 表示一阶HDMR扩展, $g^2(x)$ 表示二阶HDMR扩展。

为了得到式(2)、式(3)中的各分项函数,可引入cut-HDMR<sup>[17]</sup>扩展式。cut-HDMR扩展是通过响应变量位于穿过输入变量空间中的某参考点 $r = \{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ 的线、面及超平面上的值来表达响应变量函数 $g(x)$ 。若HDMR扩展式收敛,参考点 $r$ 则可以是输入变量空间中的任意点。根据cut-HDMR扩展,式(2)、式(3)的分项函数可表示为:

$$g_0=g(r) \quad (4)$$

$$g_i(x_i)=g^i(x_i)-g_0 \quad (5)$$

$$g_{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})=g^{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})-g_i(x_{i_1})-g_i(x_{i_2})-g_0 \quad (6)$$

其中:

$$g^i(x_i)=g(r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, x_i, r_{i+1}, \dots, r_N) \quad (7)$$

$$g^{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})=g(r_1, r_2, \dots, r_{i_1-1}, x_{i_1}, r_{i_1+1}, \dots, r_{i_2-1}, x_{i_2}, r_{i_2+1}, \dots, r_N) \quad (8)$$

将式(4)~式(8)带入式(2)及式(3)

可得:

$$g^1(x)=\sum_{i=1}^N g(r_i, \dots, r_{i-1}, x_i, r_{i+1}, \dots, r_N)-(N-1)g(r) \quad (9)$$

$$g^2(x)=\sum_{\substack{i_1=1 \\ (i_1 < i_2)}}^N g(r_i, \dots, r_{i_1-1}, x_{i_1}, r_{i_1+1}, \dots, r_{i_2-1}, x_{i_2}, r_{i_2+1}, \dots, r_N)-$$

$$(N-1)g(r)-(N-2)\sum_{i=1}^N g(r_i, \dots, r_{i-1}, x_i, r_{i+1}, \dots, r_N)+[(N-1)(N-2)/2]g(r) \quad (10)$$

因此,在结构可靠度分析中,令 $x$ 为随机输入变量, $g(x)$ 为极限状态函数, $g^1(x)$ , $g^2(x)$ 则分别为一阶、二阶HDMR响应面函数。

## 2.2 响应面函数的拟合

考察式(9)、式(10)不难发现, $g^1(x)$ 与 $g^2(x)$ 皆由 $g^i(x_i)$ , $g^{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$ 及常数项 $g(r)$ 组成,其中 $g^i(x_i)$ 与 $g^{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$ 可由移动最小二乘法(Moving-least-square, MLS)<sup>[18]</sup>拟合得到。在此将 $\{x_i\}$ 及 $(x_{i_1}, x_{i_2})$ 记为 $x_K$ ( $K=1$ 表示一元, $K=2$ 表示二元), $g^i(x_i)$ 与 $g^{i_1 i_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$ 记为 $g(x_K)$ , $g(x_K)$ 的MLS近似表达式为:

$$g(x_K)=\sum_{j=1}^S P_j(x_K) a_j(x_K)=P^T(x_K) a(x_K) \quad (11)$$

其中, $P^T(x_K)=\{P_1(x_K), P_2(x_K), \dots, P_s(x_K)\}$ 由 $S$ 个多项式的基本分项(不含交叉项)构成,二次多项式则有:

$$K=1: P^T(x_i)=\{1, x_i, x_i^2\} (S=3), \quad (12)$$

$$K=2: P^T(x_{i_1}, x_{i_2})=\{1, x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_1}^2, x_{i_2}^2\} (S=5); \quad (13)$$

$a(x_K)=\{a_1(x_K), a_2(x_K), \dots, a_s(x_K)\}$ 则为包含变量 $x_i$ 的未知系数表达式向量,由MLS拟合确定,即加权 $L_2$ 范数取极小值:

$$J=\sum_{i=1}^{2K+1} w(x_K-x'_K)[g(x'_K)-g(x'_K)]^2 \quad (14)$$

将式(11)带入式(14)得:

$$J=\sum_{i=1}^{2K+1} w(x_K-x'_K)[p^T(x'_K) a(x_K)-g(x'_K)]^2 = [p a(x_K)-g]^T W [p a(x_K)-g] \quad (15)$$

其中, $x^1 K$ 为输入变量空间中第 $I$ 个抽样点坐标( $I=1, 2, \dots, 2K+1$ ),样本点则位于参考点 $r_i$ 及 $r_i \pm f \sigma_i$ 处; $g(x^1 K)$ 表示第 $I$ 个抽样点的系统响应值:

$$g=\{g(x^1 K), g(x^2 K), \dots, g(x^{2K+1} K)\}^T; \quad (16)$$

$W$ 加权函数对角阵:

$$W=\text{dian}[w(x_K-x^1 K), \dots, w(x_K-x^{2K+1} K)]; \quad (17)$$

$$P=[p(x^1 K), p(x^2 K), \dots, p(x^{2K+1} K)]^T; \quad (18)$$

本文采用4次样条(quartic+spline)加权函数:

$$w(x_K-x^1 K)=w(\bar{s})=\begin{cases} 1-6\bar{s}^2+8\bar{s}^3-3\bar{s}^4 & (\bar{s} \leq 1) \\ 0 & (\bar{s} > 1) \end{cases} \quad (19)$$

其中 $\bar{s}=\frac{\|x_K-x^1 K\|}{s_{ml}}$ , $\|x_K-x^1 K\|$ 为任意点 $x_K$ 到第 $I$ 个样本点之间的距离, $s_{ml}$ 为第 $I$ 个样本点的影响范围,本文则取2.1倍的 $f \cdot \sigma$ 值。

若式(15)取极小值,则有:

$$\frac{\partial J}{\partial a}=A(x_K) a(x_K)-B(x_K) g=0 \quad (20)$$

其中:

$$A(x_K)=P^T W P \quad (21)$$

$$B(x_K)=P^T W \quad (22)$$

将式(21)、式(22)代入式(20)可得:

$$a(x_K)=A^{-1}(x_K) B(x_K) g \quad (23)$$

再将式(23)代入式(11)可得:

$$g(x_K)=P^T(x_K) A^{-1}(x_K) B(x_K) g \quad (24)$$

$$\text{令 } \Phi^T(x_K)=\{\phi_1(x_K), \phi_2(x_K), \dots, \phi_{2K+1}(x_K)\} = P^T(x_K) A^{-1}(x_K) B(x_K) \quad (25)$$

$$\text{有: } \phi_I(x_K)=\sum_{j=1}^S P_j(x_K) [A^{-1}(x_K) B(x_K)]_{jI} \quad (26)$$

其中 $[A^{-1}(x_K) B(x_K)]_{jI}$ 表示矩阵 $[A^{-1}(x_K) B(x_K)]$ 第 $j$ 行第 $I$ 列元素。

## 2.3 可靠度计算方法

由MLS得到一阶或二阶HDMR响应面函数后便可基于该函数求解验算点及可靠指标 $\beta$ 。本文



采用迭代算法进行可靠度求解，流程如下：

Step1 以随机输入变量均值为初始参考点 $r$ ，并选取参考点 $r_i$ 与 $r_i \pm f\sigma_i$ 为变量 $x_i$ 的抽样点；

Step2 计算 $g(r)$ 以及抽样点处的响应值 $g$ ，并根据式(24)获得 $g(x_k)$ ，再将 $g(r)$ 及 $g(x_k)$ 带入式(9)或式(10)得到一阶或二阶HDMR响应面函数。

Step3 依据可靠指标的几何意义，利用有约束最优化模型求解响应面函数的验算点 $x_D$ 和可靠指标 $\beta^0$ ：

$$\begin{cases} \text{mim } \beta = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left[ \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right]^2} \\ \text{s.t. } g(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0 \end{cases} \quad (27)$$

Step4 以验算点 $x_D$ 作为新的参考点 $r$ ，重新选取抽样点来拟合响应面函数以得到新的验算点 $x_D^k$ 及可靠指标 $\beta^k$ ；

Step5 判别 $\beta^k - \beta^{k-1} < \varepsilon$  ( $\varepsilon$ 为容许误差)是否满足。若满足则输出 $\beta^k$ ，若不满足则重复Step1~Step4步直至收敛。

根据实际工程中的 $3\sigma$ 原则可知，随机变量在 $\mu \pm 3\sigma$ 范围内取值的概率为99.7%。因此，首次抽样时 $f$ 取3可使验算点较容易包括在该范围内，而通常首次计算结果已较接近真实验算点<sup>[7]</sup>，在随后的迭代中 $f$ 值可逐步减小(取2或1)以加快收敛。另外，根据本文抽样方法以及式(9)、式(10)可知，在迭代 $k$ 次的情况下，

一阶HDMR响应面法需 $f(2N+1)$ 次抽样，而二阶HDMR响应面法在 $N \leq 2$ 时仅需 $k(2N+1)$ 次抽样，当 $N > 2$ 时则需 $k(4 \cdot C^2N + 2N + 1)$ 次抽样。

### 3 算例分析

为了说明本文方法的可行性、精度及计算效率，对若干算例进行分析，其中算例1~算例2的极限状态方程为已知，算例3~算例4的极限状态方程未知。另外，本文算例的可靠度指标均采用Matlab程序进行编程计算。

(1) 算例1<sup>[5]</sup>：假设极限状态方程为 $G=18.46154-74769.23xy^3$ ，其中随机输入变量 $x$ ， $y$ 均服从正态分布且相互独立： $x:N(1000, 200)$ ， $y:N(250, 37.5)$ ，计算其可靠指标。采用本文方法所得的各迭代步结果均列于表1中。其中一阶HDMR响应面法经5次迭代(25次抽样)收敛，可靠指标为2.3328，验算点为(1101.1, 164.6)；二阶HDMR响应面法经4次迭代即收敛(20次抽样)，可靠指标为2.333，验算点为(1101.3, 164.6)。另外，本文将其它方法所得结果与以上结果同列于表2进行比较。其中，M-C法抽样 $1e+7$ 次所得可靠指标精确解为2.3449；FORM法所得结果误差为-0.597%；序列RSM法经8次(抽样41次)迭代后收敛，其误差相对FORM法较小；而本文方法所得结果的精度相比FORM与序列RSM法均有所提高，且抽样次数均少于序列RSM法。

表1 算例1可靠指标计算结果

迭代次数	验算点 $x$	一阶HDMR响应面可靠指标 $\beta$	$G(x_D)$	验算点 $x_D$	二阶HDMR响应面可靠指标 $\beta$	$G(x_D)$
1	(1 041.6, 175.8)	1.988 9	4.128	(1 059.9, 170.8)	2.1 333	2.557
2	(1 094.3, 165.1)	2.311 7	0.281	(1 097.6, 165.1)	2.3 156	0.226
3	(1 094.3, 164.4)	2.331 0	0.047	(1 101.9, 164.6)	2.3 336	-0.013
4	(1 102.4, 164.6)	2.334 2	-0.022	(1 101.3, 164.6)	2.3 330	5.1e-4
5	(1 101.1, 164.6)	2.332 8	3.3e-4	--	--	--

表2 算例1分析结果比较

计算方法	抽样次数	验算点	可靠指标	误差/%
M-C法	$1e+7$	--	2.344 9	0
FORM	--	(1 118.6, 165.5)	2.330 9	-0.597
序列RSM	41	(1 125.7, 165.8)	2.331 2	-0.584
一阶HDMR	25	(1 101.1, 164.6)	2.332 8	-0.516
二阶HDMR	20	(1 101.3, 164.6)	2.333 0	-0.507

(2) 算例2<sup>[16]</sup>：假设极限状态方程为 $G=8-0.32(x_1-1)^2x_2^2-x^2+x_3^3-0.2\sin(x_1x_3)$ ，随机输入变量均为标准正态分布且相互独立，求解可靠指标。从极限状态方程不难看出，正弦函数的引入增长了方程的非线性程度。将本文方法所得结果与其它方法的结果列于表3，并将M-C法所得

结果看作精确解。显然，由于非线性影响，FORM法误差较大为28.76%。序列RSM法与本文方法所得结果较接近，结果精度较之FORM法均有很大提高。其中序列RSM法经7次迭代（50次抽样）收敛，一阶HDMR响应面法经6次迭代（42次抽样）即收敛，而二阶HDMR响应面法则经历6次迭代（114次抽样）收敛。显然，二阶HDMR响应面法虽精度略有提高，但所需的抽样次数却增加较多，必然降低其计算效率。

从算例（1）~算例（2）中不难发现，当 $N \leq 2$ 时，本文方法所需抽样次数较序列RSM法要略少，而二阶HDMR响应面法则通常更快收敛。当 $N > 2$ 时，二阶HDMR响应面法的抽样次数则大大增加，虽然精度略有提高但却降低了计算效率。因此，本文建议在 $N > 2$ 的情况下可首选一阶HDMR响应面法进行可靠度分析，这样既能确保一定精度又可提高分析效率。

表3 算例2分析结果比较

计算方法	抽样次数	验算点	可靠指标	误差/%
M-C法	1e+7	—	1.786 1	0
FORM	—	(-1.3212, 1.8810, 0.0698)	2.299 7	28.76
序列RSM	50	(0.0086, 0.1867, -1.9837)	1.992 5	11.56
一阶HDMR	42	(0.0013, 0.1015, -1.9912)	1.993 8	11.63
二阶HDMR	114	(-0.0318, 0.1734, -1.9835)	1.991 3	11.48

（3）算例3<sup>[19]</sup>：某桁架结构具有14根杆件，在节点2、3处作用2个大小为444.822kN的集中力，见图1。杆件弹性模量为 $6.9e+7\text{kN/m}^2$ ，截面积为 $A_i$  ( $i=1, 2, \dots, 14$ )， $A_i$ 均为正态分布：均值为 $16.129\text{cm}^2$ ，标准差为 $3.226\text{cm}^2$ 。考察节点3的竖向位移 $u_3$ ，假定其容许最大值为 $45.72\text{cm}$ ，因此有极限状态方程： $g(A)=45.72-u_3$  (cm)，求解可靠指标。

节点3的竖向位移 $u_3$ 采用ANSYS有限元程序求解，最后将一阶HDMR响应面法的计算结果与其它方法的计算结果共同列于表4中。

其中，有限元结合M-C法采用ANSYS程序中的概率设计系统（PDS）进行M-C拉丁超立方抽样（LHS）分析，经1e+4次抽样分析后得到可靠指标为1.104；传统RSM法则采用PDS系统中的中

心复合设计（285次有限元计算）抽样拟合响应面，再对响应面进行1e+4次M-C抽样，得到可靠指标为1.1983；而本文所述一阶HDMR响应面法经5次迭代（145次有限元计算）计算即收敛，得到可靠指标为1.2023，验算点坐标见表5。显然，当输入变量数目较大时，一阶HDMR响应面法的精度虽略有下降，但也足以满足工程需求，并大大提高计算效率。

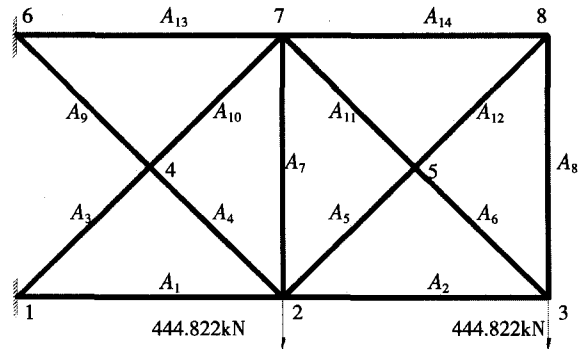


图1 结构计算简图

表4 算例3分析结果比较

计算方法	有限元计算次数	失效概率	可靠指标
有限元结合M-C法	1e+4	0.1348	1.104 0
传统RSM结合M-C法	285	0.1154	1.198 3
一阶HDMR响应面法	145	—	1.202 3

表5 算例3的验算点坐标值

A1-A7/cm <sup>2</sup>	12.934	15.904	15.641	15.618	15.956	15.807	16.139
A8-A14/cm <sup>2</sup>	16.006	15.618	15.641	15.807	15.956	13.106	16.006
g(A)/cm	2.152e-3						

（4）算例4<sup>[14]</sup>：某跨度 $L=9.75\text{m}$ 的两端固结梁结构，受均布荷载 $q$ 作用，见图2，梁的抗弯刚度 $EI$ 与均布荷载 $q$ 均服从正态分布，其中 $EI$ 的均值及标准差分别为 $464877\text{kN} \cdot \text{m}^2$ 与 $92977\text{kN} \cdot \text{m}^2$ ， $q$ 的均值及标准差分别为 $116.7\text{kN} \cdot \text{m}$ 与 $35\text{kN} \cdot \text{m}$ 。假定梁左端弯矩超过容许值结构即失效，令极限状态方程为： $g=1391-ML$  ( $\text{kN} \cdot \text{m}$ )，求解可靠度指标。将结构离散为5个长1.95m的有限梁单元，并采用中心点法将随机场离散为与有限元网格一致的随机网络，因此该问题包含10个随机变量： $\{EI_i, q_i\}$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ )。

弯矩 $ML$ 采用ANSYS有限元程序进行求解，将本文所述一阶HDMR响应面法的计算结果与有

限元结合M-C法的计算结果共同列于表6中。其中,有限元结合M-C法采用ANSYS程序中的概率设计系统(PDS)进行M-C拉丁超立方抽样(LHS)分析,经 $1e+4$ 次抽样后所得可靠指标为2.646。一阶HDMR响应面法经历7次迭代(147次有限元分析)后收敛,所得可靠指标为2.632,误差为-0.529%,显然具有非常高的计算精度。

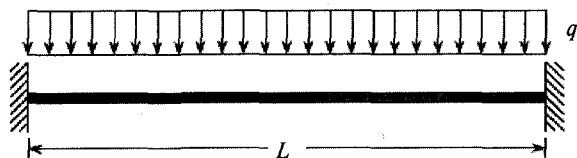


图2 结构计算简图

表6 算例4分析结果

计算方法	抽样次数	失效概率	可靠指标	误差/%
有限元结合M-C法	$1e+4$	$3.673e-3$	2.646	0
一阶HDMR响应面法	147	--	2.632	-0.529

#### 4 结论

对于实际工程中极限状态方程无法明确表达的可靠度问题,采用响应面法进行求解较其它方法更为简便。本文提出一种基于HDMR扩展式的响应面法进行结构可靠度的计算。通过算例分析表明,通常低阶的(一阶、二阶)HDMR响应面法即可获得较好的精度,而一阶HDMR响应面法对于较多输入变量的结构则有更高的计算效率。

另外,对于实际工程则可采用ANSYS, MIDAS或NASTRAN等常用结构分析程序进行抽样分析,而采用Matlab语言对响应面函数及可靠指标进行编程求解可使计算效率大为提高。因此,本文方法具有较好的实用性和一定的推广应用价值。

#### 参考文献

- [1] BOX G E P, WILSON K B. On the Experimental Attainment Optimum Conditions [J]. Journal of the Royal Stat. Society, 1951, Series B(13):1-34.
- [2] WONG F S. Slope Reliability and Response Surface Method [J]. Journal of Geotechnical Engineering, 1985, 111(1): 32-53.
- [3] FARAVELLI L. Response-surface Approach for Reliability Analysis [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1989, 115(12): 2763-2781.
- [4] BUCHER C G, BOURGUND U. A Fast and Efficient Response Surface Approach for Structural Reliability Problems [J]. Structural Safety, 1990, 7(1):57-66.
- [5] RAJASHEKHAR M R, ELLINGWOOD B R. A New Look at the Response Surface Approach for Reliability Analysis [J]. Structural Safety, 1993 (12): 205-220.
- [6] LIU Y W, MOSES F. A Sequential Response Surface Method and its Application in the Reliability Analysis of Aircraft Structural Systems [J]. Structural Safety, 1994, 11(1): 39-46.
- [7] 佟晓利, 赵国藩. 一种与结构可靠度分析几何法相结合的响应面法 [J]. 土木工程学报, 1997, 30(4):51-57.
- [8] KIM S H, NA S W. Response Surface Method Using Vector Projected Sampling points [J]. Structural Safety, 1997, 19: 3-19.
- [9] DAS P K, ZHENG Y. Cumulative Formation of Response Surface and its Use in Reliability Analysis [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2000, 15: 309-315.
- [10] GAYTON N, BOURINET J M, LEMAIRE M. CQ2RS: a New Statistical Approach to the Response Surface Method for Reliability Analysis [J]. Structural Safety, 2003, 25: 99-121.
- [11] GUPTA S, MMNOHAR C S. An Improved Response Surface Method for the Determination of Failure Probability and Importance Measures [J]. Structural Safety, 2004, 26: 123-139.
- [12] KAYMAZ I, MCMAHON C A. A Response Surface Method Based on Weighted Regression for Structural Reliability Analysis [J]. Probability Engineering Mechanics, 2005, 20: 11-17.
- [13] KANG S C, KOH H M, CHOO J F. An Efficient Response Surface Method Using Moving Least Squares Approximation for Structural Reliability Analysis [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2010, 25: 365-371.
- [14] ALLAIX D L, CARBONE V I. An Improvement of the Response Surface Method [J]. Structural Safety, 2011, 33: 165-172.
- [15] GUAN X L, MELCHERS R E. Effect of Response Surface Parameter Variation on Structural Reliability Estimates [J]. Structural Safety, 2001, 23:429-441.
- [16] GAVIN H P, YAU S C. High-order Limit State Functions in the Response Surface Method for Structural Reliability Analysis [J]. Structural Safety, 2008, 30: 162-179.
- [17] XU H, RAHMAN S. Decomposition Methods for Structural Reliability Analysis [J]. Probabilistic Engineering Mechanics, 2005, 20:239-250.
- [18] CHOWDHURY R, RAO B N, MEHER Prasad A. High-dimensional Model Representation for Reliability Analysis [J]. Communications in Numerical Method in Engineering, 2009, 25: 301-307.
- [19] RABITZ H, ALIS O F. General Foundations of High-dimensional Model Representations [J]. Journal of Mathematical Chemistry, 1999, 25:197-233.
- [20] BELYTSCHKO T, KRONGAIZ Y, ORGAN D. Meshless Methods: an Overview and Recent Developments [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139:3-47.