考虑拉索滑移的索杆结构展开过程模拟

蔡建国[1,2]　冯　健[1,2]　汪　凯[1,2]
（1 东南大学 混凝土及预应力混凝土结构教育部重点实验室　南京　210096
2 东南大学　国家预应力工程技术研究中心　南京　210096）

摘　要:本文研究了拉索滑移对折叠索杆结构展开过程的影响。在提出一种基于悬链线解析解的二节点索单元的基础上，推导了索在支撑点处的滑移刚度，通过调整支撑点两侧索段的长度使两侧的索力满足协调关系，建立了能够考虑滑移的索结构运动过程分析方法。为了验证本文方法的正确性，对文献中介绍的两个算例进行了分析。分析结果表明本文方法能够正确有效的模拟索结构中的拉索滑移。最后对由四连杆机构和拉索构成的折叠索杆结构的展开过程进行了讨论。结果表明拉索滑移对索杆结构性能的影响较大；当拉索考虑滑移时，主动索的长度变化较小，而且节点坐标的改变幅度更大。

关键词:展开　弹性悬链线　索杆结构　拉索滑移　非线性
DOI: 10.13211/j.cnki.pstech.2015.06.003

1 前言

在可展结构中拉索是一个非常重要的构件[1]。在过去的二十年中，国内外科学家提出了许多种可展索杆结构体系[2-7]。这类可展结构被广泛应用于伸展臂、天线以及开启屋盖结构中。在索杆结构的展开过程中，一般拉索可以在节点处滑动。而如果我们仍然采用常规拉索的分析方法，不考虑拉索的滑移将会对分析结果产生很大的误差[8]。因此，本文在分析中考虑了拉索的滑移。本文研究的目标是建立一种有效的方法来分析折叠索杆结构的展开过程，并在整体结构分析中考虑拉索滑移的影响。

大部分商用有限元软件如ABAQUS，ANSYS，SAP2000不适合用于折叠索杆结构的建模和分析，这是因为这些软件中的索单元常用具有等效刚度的杆或者忽略抗弯刚度的梁单元来模拟，这样不能很好地考虑索在支撑点处滑移的影响，并且这种影响是不容忽略的[9]。

若两端有较好的支撑，并假定索线重沿索长均匀分布，则为悬链线模型。悬链线方程最早在1691年由Leibniz，Huygens和Johann Bernoulli 提出，随后很多学者对弹性悬链线索单元进行了深入的研究[10-14]，但是大多数都没有考虑拉索滑移的影响。

近来Zhou等学者运用虚功原理和拉格朗日列式法建立了一种考虑滑移的三节点索单元，但是只考虑中间节点的滑移，这阻碍了它在折叠索杆结构分析中的应用[15]。Chen等用同样的方法建立了多节点滑移索单元，并且在商业通用有限元软件ABAQUS中研究了弦支穹顶结构的静力效应[16]。冷冻升温法是指在节点一侧的拉索上施加虚拟增大的温度荷载，在节点的另一侧拉索上施加虚拟减小的温度荷载，该方法被用来研究发生滑移的索节点对弦支穹顶结构力学性能的影响[17]。聂建国等采用一种非线性方法来计算多跨连续索在中间支撑点处的滑移[18]。魏建东为了考虑自重的影响，用悬链线单元模拟拉索，解非线性方程的过程中采用连续法和牛顿法来增加计算的有效性[19]。从以上分析可以看出，目前拉索滑移对折叠索杆结构展开过程影响的研究较少。

本文用两节点滑移索单元来研究索杆结构的展开过程。首先基于弹性悬链线理论来研究其几何和刚度矩阵，并根据索的拉力和索的长度之比的变化来考虑滑移刚度。最后给出三个例子来证明所提方法的正确性和可行性。

2 理论和公式

2.1 基本假定

本文采用的假定如下：

（1）索没有抗弯刚度（EI≈0）；

基金项目：国家自然科学基金(50908044, 51278116)

（2） 索没有扭转刚度，只能承受拉力。

（3） 外荷载（含自重）沿索长均匀分布；

（4） 构件材料符合虎克定律，且始终处于弹性工作的状态。

2.2 索单元的几何方程

对于具有一定无应力长度的索，其内力、节点力、节点坐标的关系推导如下：

图1所示为悬链线索单元的平面索段，定义其局部坐标系为oxz。平衡曲线的形式如下：

$$z(x)=\frac{H}{\omega}[\cosh\alpha-\cosh(\frac{2\beta x}{L}-\alpha)] \quad (1)$$

$$\alpha=\sinh^{-1}[\frac{\beta(C/L)}{\sinh\beta}]+\beta \quad (2)$$

$$\beta=\frac{\omega L}{2H} \quad (3)$$

式中H为悬索张力的水平分量，ω为沿索长的均布荷载，L为悬索两端节点的水平距离，C为悬索两端节点的竖向高差。

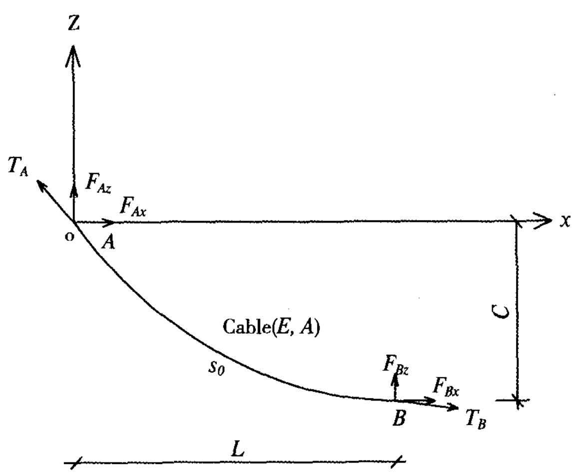

图1 索单元

索单元的长度为：

$$ds=\sqrt{dx^2+dz^2}=\sqrt{1+(\frac{dz}{dx})^2}dx \quad (4)$$

整根索的长度可由上式积分求得：

$$s=\int_A^B ds=\int_0^L\sqrt{1+(\frac{dz}{dx})^2}\,dx \quad (5)$$

悬索张力的水平分量H与张力T的关系为：

$$s=H\frac{ds}{dx} \quad (6)$$

索的应变为：

$$\xi=\frac{T}{EA}=\frac{H}{EA}\cdot\frac{ds}{dx} \quad (7)$$

式中EA为索的轴向刚度。

根据小变形假定，所以索的伸长量ΔS等于：

$$\begin{aligned}\Delta S&=\int_L\xi ds=\int_L(\frac{H}{EA}\cdot\frac{ds}{dx})ds\\&=\int_L(\frac{H}{EA}\cdot\frac{ds}{dx})\frac{ds}{dx}dx=\frac{H}{EA}\int_L(\frac{ds}{dx})^2dx\end{aligned} \quad (8)$$

将式（4）代入式（8）可得：

$$\Delta S=\frac{H}{EA}\int_L[1+(\frac{dz}{dx})^2]dx \quad (9)$$

根据式（1）、（5）、（9）可得索的伸长量为

$$S=\frac{H}{\omega}(\sinh\alpha-\sinh\gamma) \quad (10)$$

$$\Delta S=\frac{H}{4\omega EA}[2L\omega+H\sinh(2\alpha)-H\sinh(2\gamma)] \quad (11)$$

其中

$$\gamma=\sinh^{-1}(\frac{\omega C}{2H\sinh\beta})-\beta \quad (12)$$

索的变形协调条件为：

$$\Delta S=S-S_0 \quad (13)$$

将式（10）和式（11）代入式（13），可得索的变形协调方程式为：

$$\begin{aligned}&\frac{H}{4\omega EA}[2L\omega+H\sinh(2\alpha)-H\sinh(2\gamma)]\\&=\frac{H}{\omega}(\sinh\alpha-\sinh\gamma)-S_0\end{aligned} \quad (14)$$

索的变形协调方程（14）就反映了索张力的水平分量H、荷载分布形式ω和索的无应力长度S_0三者之间的关系。

2.3 索单元刚度

索单元的几何参数L和C的计算过程如下[19]：

$$\begin{aligned}L=&-F_{Ax}[\frac{S_0}{EA}\\&+\frac{1}{\omega}\ln\frac{-F_{Az}+\omega S_0+\sqrt{F_{Ax}^2+(-F_{Az}+\omega S_0)^2}}{\sqrt{F_{Ax}^2+F_{Az}^2}-F_{Az}}]\end{aligned} \quad (15)$$

$$C=\frac{1}{2EA\omega}(-2\omega S_0F_{Az}+\omega^2S_0^{\ 2})+\frac{\sqrt{F_{Ax}^{\ 2}+(-F_{Az}+\omega S_0)^2}-\sqrt{F_{Ax}^{\ 2}+F_{Az}^{\ 2}}}{\omega} \quad (16)$$

其中T_A和T_B分别是A端和B端的索张力，F_{Ax}，F_{Az}，F_{Bx}，F_{Bz}分别是x和z方向的节点力分量，它们的关系如下：

$$F_{Bz}=-F_{Az}+\omega S_0 \quad (17)$$

$$F_{Bx}=-F_{Ax} \quad (18)$$

$$T_A=\sqrt{F_{Ax}^{\ 2}+F_{Az}^{\ 2}} \quad (19)$$

$$T_B=\sqrt{F_{Bx}^{\ 2}+F_{Bz}^{\ 2}} \quad (20)$$

从式（15）和式（16）可以发现L、C仅仅和F_{Ax}、F_{Az}有关，分别对F_{Ax}、F_{Az}求偏微分得

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial F_{Ax}}\delta F_{Ax}+\frac{\partial C}{\partial F_{Az}}\delta F_{Az} \quad (21)$$

$$\delta C=\frac{\partial C}{\partial F_{Ax}}\delta F_{Ax}+\frac{\partial C}{\partial F_{Az}}\delta F_{Az} \quad (22)$$

将式（21）和式（22）合写成矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix}\delta L\\ \delta C\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\xi_1 & \xi_2\\ \xi_3 & \xi_4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\delta F_{Ax}\\ \delta F_{Az}\end{pmatrix} \quad (23)$$

其中

$$\xi_1=\frac{\partial L}{\partial F_{Ax}},\ \xi_2=\frac{\partial L}{\partial F_{Az}},\ \xi_3=\frac{\partial C}{\partial F_{Ax}},\ \xi_4=\frac{\partial C}{\partial F_{Az}},$$

根据式（17）和式（18）可得索B端张力变化量和A端张力变化量之间的关系为：

$$\begin{pmatrix}\delta F_{Bx}\\ \delta F_{Bz}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\delta F_{Ax}\\ \delta F_{Az}\end{pmatrix} \quad (24)$$

悬链线索元A端和B端的位移增量分别为$\delta u_x^{\ A}$，$\delta u_y^{\ A}$，$\delta u_z^{\ A}$，$\delta u_x^{\ B}$，$\delta u_y^{\ B}$，$\delta u_z^{\ B}$。节点力和节点位移的变化关系写成矩阵的形式为：

$$\begin{pmatrix}\delta F_{Ax}\\ \delta F_{Az}\\ \delta F_{Bx}\\ \delta F_{Bz}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_3\\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \alpha_1 & \alpha_3 & -\alpha_1 & -\alpha_3\\ \alpha_3 & \alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\delta u_x^{\ A}\\ \delta u_z^{\ A}\\ \delta u_x^{\ B}\\ \delta u_z^{\ B}\end{pmatrix} \quad (25)$$

其中

$$\alpha_1=\frac{\xi_4}{d},\ \alpha_2=-\frac{\xi_3}{d},\alpha_3=-\frac{\xi_2}{d},\ \alpha_4=\frac{\xi_1}{d},\ d=\xi_1\xi_4-\xi_2\xi_3$$

因此索单元的刚度可以表示为：

$$K_c=\begin{bmatrix}-\alpha_1 & -\alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_3\\ -\alpha_3 & -\alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \alpha_1 & \alpha_3 & -\alpha_1 & -\alpha_3\\ \alpha_3 & \alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_4\end{bmatrix} \quad (26)$$

2.4 滑移刚度

当节点坐标和外荷载给定后，根据式（15）和式（16）可以推导出F_{Ax}，F_{Az}和S_0，关系如下：

$$f_1(S_0\ \ F_{Ax}\ \ F_{Az})=$$

$$-F_{Ax}[\frac{S_0}{EA}+\frac{1}{\omega}\ln\frac{-F_{Az}+\omega S_0+\sqrt{F_{Ax}^{\ 2}+(-F_{Az}+\omega S_0)^2}}{\sqrt{F_{Ax}^{\ 2}+F_{Az}^{\ 2}}-F_{Az}}]-L=0 \quad (27)$$

$$f_2(S_0\ \ F_{Ax}\ \ F_{Az})=\frac{1}{2EA\omega}(-2\omega S_0F_{Az}+\omega^2S_0^{\ 2})+\frac{\sqrt{F_{Ax}^{\ 2}+(-F_{Az}+\omega S_0)^2}-\sqrt{F_{Ax}^{\ 2}+F_{Az}^{\ 2}}}{\omega}-C=0 \quad (28)$$

将式（27）和式（28）两边取全微分得：

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_1}{\partial S_0}dS_0+\frac{\partial f_1}{\partial F_{Ax}}dF_{Ax}+\frac{\partial f_1}{\partial F_{Az}}dF_{Az}=0\\ &\frac{\partial f_2}{\partial S_0}dS_0+\frac{\partial f_2}{\partial F_{Ax}}dF_{Ax}+\frac{\partial f_2}{\partial F_{Az}}dF_{Az}=0\end{aligned} \quad (29)$$

从式（28）可得

$$\frac{dF_{Ax}}{dS_0}=\frac{\frac{\partial f_2}{\partial S_0}\frac{\partial f_1}{\partial F_{Az}}-\frac{\partial f_1}{\partial S_0}\frac{\partial f_2}{\partial F_{Az}}}{\frac{\partial f_1}{\partial F_{Ax}}\frac{\partial f_2}{\partial F_{Az}}-\frac{\partial f_2}{\partial F_{Ax}}\frac{\partial f_1}{\partial F_{Az}}} \quad (30)$$

$$\frac{dF_{Az}}{dS_0}=\frac{\frac{\partial f_1}{\partial S_0}\frac{\partial f_2}{\partial F_{Ax}}-\frac{\partial f_2}{\partial S_0}\frac{\partial f_1}{\partial F_{Ax}}}{\frac{\partial f_1}{\partial F_{Ax}}\frac{\partial f_2}{\partial F_{Az}}-\frac{\partial f_2}{\partial F_{Ax}}\frac{\partial f_1}{\partial F_{Az}}} \quad (31)$$

滑移刚度是指索单元原长改变单位长度时所需改变的张力值。所以索在A端的滑移刚度为：

$$\varphi_A=\frac{dT_A}{dS_0}=\frac{\partial T_A}{\partial F_{Ax}}\frac{dF_{Ax}}{dS_0}=\frac{\partial T_A}{\partial F_{Az}}\frac{dF_{Az}}{dS_0} \quad (32)$$

其中

$$\frac{\partial T_A}{\partial F_{Ax}}=\frac{F_{Ax}}{\sqrt{F_{Ax}^{\ 2}+F_{Az}^{\ 2}}},\ \frac{\partial T_A}{\partial F_{Az}}=\frac{F_{Az}}{\sqrt{F_{Ax}^{\ 2}+F_{Az}^{\ 2}}}$$

将式（30）和式（31）代入式（32），滑移刚度为：

$$\varphi_A=\frac{F_{Ax}}{\sqrt{F_{Ax}{}^2+F_{Az}{}^2}}\left(\frac{\frac{\partial f_2}{\partial S_0}\frac{\partial f_1}{\partial F_{Az}}-\frac{\partial f_1}{\partial S_0}\frac{\partial f_2}{\partial F_{Az}}}{\frac{\partial f_1}{\partial F_{Ax}}\frac{\partial f_2}{\partial F_{Az}}-\frac{\partial f_2}{\partial F_{Ax}}\frac{\partial f_1}{\partial F_{Az}}}\right)+\frac{F_{Az}}{\sqrt{F_{Ax}{}^2+F_{Az}{}^2}}\left(\frac{\frac{\partial f_1}{\partial S_0}\frac{\partial f_2}{\partial F_{Ax}}-\frac{\partial f_2}{\partial S_0}\frac{\partial f_1}{\partial F_{Ax}}}{\frac{\partial f_1}{\partial F_{Ax}}\frac{\partial f_2}{\partial F_{Az}}-\frac{\partial f_2}{\partial F_{Ax}}\frac{\partial f_1}{\partial F_{Az}}}\right) \tag{33}$$

其他端的滑移刚度也可以用这个方法得到。

2.5 杆的刚度

直杆的刚度用矩阵表达如下：

$$K_s=\begin{bmatrix}\frac{(EA)_s}{l_s} & -\frac{(EA)_s}{l_s}\\ -\frac{(EA)_s}{l_s} & \frac{(EA)_s}{l_s}\end{bmatrix} \tag{34}$$

其中（EA）$_s$为直杆的轴向刚度，l_s为直杆的长度。

3 算例及分析

3.1 单根拉索

索的无应力长度为S_0，沿索长的均布荷载为ω，悬索张力为H可以由式（14）得到。但是方程理论解无法得到，基于Matlab可以得到数值解。式（14）可以简化为

$$F(H)=\frac{H}{\omega}(\sinh\alpha-\sinh\gamma)-S_0-\frac{H}{4\omega EA}[2L\omega+H\sinh(2\alpha)-H\sinh(2\gamma)] \tag{35}$$

本文用这种方法研究了沈等提出的算例[20]。索的弹性模量$E=1.8\times10^5$MPa，截面面积$A=0.001\text{m}^2$，索的均布荷载ω为索的自重，其值为76.93N/m。结果如表1所示，θ为索两节点连线与局部坐标轴x方向的夹角。可以发现所得结果和沈等提出的算例吻合的很好，两者的误差小于2%。

表1　索张力的计算结果比较

θ(°)	L（m）	C（m）	S_0（m）	本文的计算索张力的平均值（N）	文献[20]的计算索张力的平均值（N）	相对误差
0	100	0	110	6579.1	6713.1	2%
	100	0	105	8144.2	8310.1	2%
	100	0	100	79865	80938.7	1.33%
	100	0	99.9	216820	217411.2	0.27%
	100	0	99.8	414960	415888.7	0.22%
30	86.6025	50	110	6027.3	6150.1	2%
	86.6025	50	105	7290.9	7439.5	2%
	86.6025	50	100	72546	73545.9	1.36%
	86.6025	50	99.9	214240	214813.7	0.27%
	86.6025	50	99.8	414150	415131.6	0.24%
60	50	86.6025	110	4786.8	4884.4	2%
	50	86.6025	105	5211.2	5317.4	2%
	50	86.6025	100	50329	51032.9	1.38%
	50	86.6025	99.9	208840	209230	0.20%
	50	86.6025	99.8	412680	413599.6	0.20%

3.2 两跨索结构

本文所采用的两跨连续索结构由聂建国等的论文给出[18]，它的参数如图2所示。索中间有个支撑点，原长分别为8.02m和12.02m，两索的弹性模量为$E=1.7\times10^5$MPa，截面面积为$6.74\times10^{-5}\text{m}^2$，沿索长的均布荷载为200N/m。

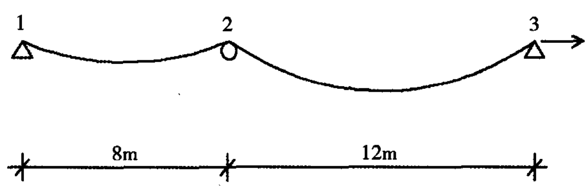

图2　有一个滑移节点的两跨连续索结构

让右侧的支撑移到。考虑两种情况，在中间支撑考 虑拉索滑移和不考虑拉索滑移，结果如表2和图3所示。 表2中的结果和聂建国等提出的算例吻合的很好[18]。拉索左端的张力和右端的张力相等，是由于两端的高度相 同。另外，考虑滑移时两段索的内力都是相等的，而不考虑滑移时两段索力相差很大。因此拉索滑移的影响是很明显的。如图7所示，在相同的预拉力下，考虑拉索 滑移时右侧支撑的位移几乎是不考虑拉索滑移时的2倍。

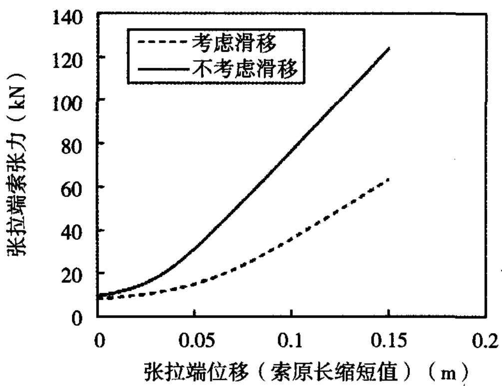

图3 张拉端索力随张拉端位移的变化

表 2 初始平衡位置计算结果

			水平张力（kN）	左端张力（kN）	右端张力（kN）
本文计算结果	滑移	12 跨	8.3149	8.3534	8.3534
		23 跨	8.2661	8.3534	8.3534
	无滑移	12 跨	5.9439	5.9978	5.9978
		23 跨	9.7577	9.8316	9.8316
文献[18]的计算结果	滑移	12 跨	8.3102	8.3478	8.3488
		23 跨	8.2616	8.3488	8.349
	无滑移	12 跨	5.9413	5.9952	5.9953
		23 跨	9.7515	9.8253	9.8255

3.3 索杆结构

图4所示为一种带拉索的四连杆结构。这种四连杆结构有4根杆件，拉索5是为了驱动该结构的展开。

图5所示为含有带拉索的四连杆结构的平面折叠索杆结构，图中给出了折叠状态、半展开状态以及完全展开状态。图中点划线表示连续索，是主动索，虚线表示分开的索，是被动索。结构展开过程中主动索的长度减小，折叠的过程中长度增大，即主动索是用来控制索杆结构的展开与折叠过程。被动索在张拉过程中是松弛的， 当张拉到完全展开的位置时，被动索才发挥作用，即被动索的作用是结束展开过程。图5中也给出了被动索的折叠和半展开状态。被动索对展开过程影响比较小，所 以在接下来的算例中不考虑被动索。

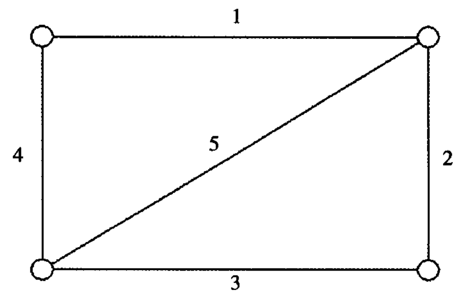

图4 带拉索的四连杆结构

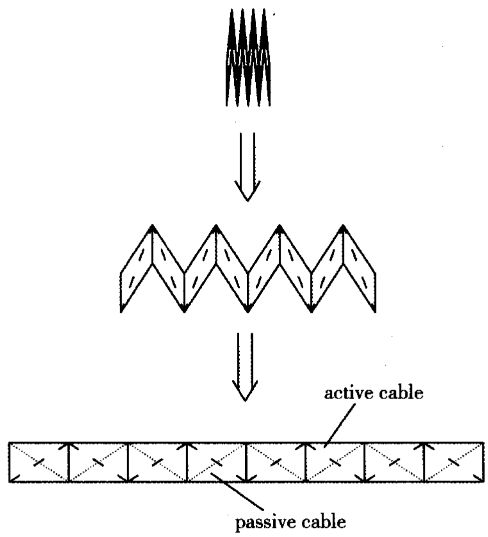

图5 索杆结构的展开过程

图6所示为折叠索杆结构的初始构型。表中所示为结构的相关参数。在中间节点3处索会发生滑移。弹性模量为1.8×10^5MPa，截面面积为6.74×10^{-5}m²，沿索长的均布荷载为 200N/m，索原长为16.52m。杆件的弹性模量为2.1×10^5 MPa，杆件5、6和7的截面面积为 0.0154m²，杆件5、6和7的截面面积为0.1257m²。节点1在支撑点处固定，通过张拉索2，即逐渐缩短索2的原长使结构逐渐展开， 节点2水平运动。

图7和图8分别给出了节点4的z坐标和节点2的x坐标随主动索的长度的变化关系。节点4的z向坐标都 从1m运动到0m表示结构已经完全展开平整，这时节点2的x向坐标都从16m运动到16.13m。从图7和图8中还可以发现考虑拉索中间节点的滑移时，主动索的长度变化会减小。当刚开始张拉时，拉索滑移对节点4的z坐标变化和节

点2的x坐标变化影响较小，但是随着张拉端位移的继续增加，这种影响会逐渐增大。考虑滑移时的节点坐标变换较快。

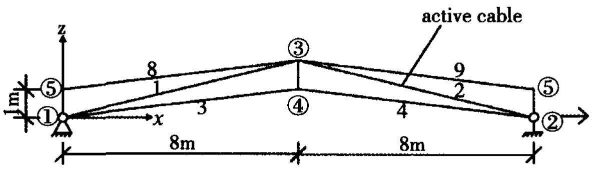

图6　折叠索杆结构算例

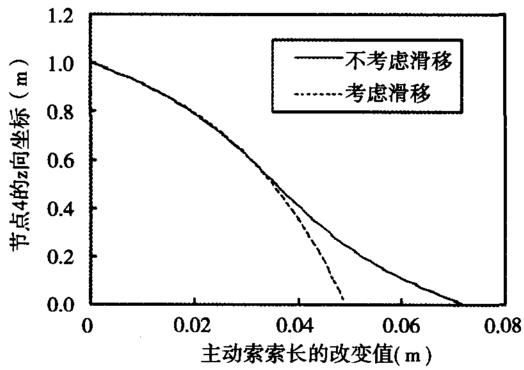

图7　节点4的Z向坐标随张拉端位移的变化

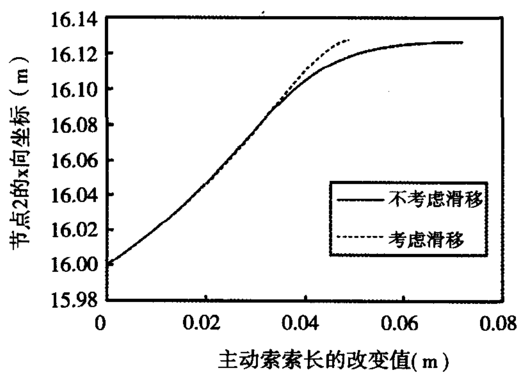

图8　节点2的X向坐标随张拉端位移的变化

4 结论

本文提出一种基于悬链线解析解的二节点索单元，研究了拉索滑移对折叠索杆结构展开过程的影响，推导了索在支撑点处的滑移刚度，并和其他文献的结果进行 了比较，所得结论如下：

（1）基于悬链线解析解的二节点索单元通过考虑滑移刚度，可以很好地模拟有滑移的索结构。

（2）初始平衡状态的索长和索张力不论是否考虑滑移都和之前的文献吻合得很好。当承受相同 的预加力时，考虑滑移时的支撑点位移几乎是不考虑滑移的2倍，所以是否考虑滑移对结构有重要影响。

（3）拉索滑移对于折叠索杆结构的展开过程有较大影响。考虑拉索滑移时，主动索的长度变化更小，节点坐标变换更快。

致谢

本文受到国家自然科学基金项目（50908044，51278116），江苏省六大 人才高峰项目（07-F-008），东南大学优秀博士论文培育基金（YBJJ0817) 和江苏省高等学校优势学科项目等的资助。

参考文献

[1] Kwan A S K, You Z, Pellegrino S. Active and passive cable elements in deployable/retractable masts, Int J Space Struct, 1993, 8(1&2):29–40.

[2] Pellegrino S. Deployable structures. London: Springer, 2002.

[3] Motro R. Tensegrity systems: the state of the art. Int J Space Struct,1992, 7(2): 75–83.

[4] Vu K K, Liew J Y R, Anandasivam K. Deployable tension–strut structures: from concept to implementation. J Constr Steel Res, 2006,62: 195–209.

[5] Vu K K, Liew J Y R, Krishnapillai A. Commutative algebra in struc– tural analysis of deployable tension–strut structures. J Int Assoc Shell Spat Struct, 2005, 46: 173–178.

[6] Liew J Y R, Tran T C. Novel deployable strut–tensioned membrane structures. J Int Assoc Shell Spat Struct, 2006, 47:17–29.

[7] Vu K K, Liew J Y R, Anandasivam K. Deployable tension–strutstructures: structural morphology study and alternative form creations. Int J Space Struct, 2006, 21(3): 149–164.

[8] Cai J G, Lim J, Feng J, Xu Y X, Wang K. Elastic catenary cable ele–ment considering frictional slip effect, Sci China Tech Sci, 2012,55(6):1489–1495.

[9] Karoumi R. Some modeling aspects in the nonlinear finite element analysis of cable supported bridges, Comput Struct, 1999, 71:397–412.

[10] Irvine H M. Cable structures MIT press, Cambridge, MA, 1981, 15–24.

[11] Leonard J W. Tension structures. McGraw–Hill, New York, 1988.

[12] Wang Chunjiang,Wang Renpeng, Dong Shilin, Qian Ruojun. A NewCatenary Cable Element, Int J Space Struct, 2003, 18(4): 269–275.

[13] Andreu A, Gil L, Roca P. A new deformable catenary element for the analysis of cable net structures, Comput Struct, 2006, 84: 1882–1890

[14] Tibert G. Numerical analyses of cable roof structures, Royal Institute of Technology, Sweden, 1999.

[15] Zhou B, Accorsi M L, Leonard J W. Finite element formulation for modeling sliding cable elements, Comput Struct, 2004, 82: 271–280.

[16] Chen Z H, Wu Y J, Yin Y, Chan S. Formulation and application of multi–node sliding cable element for the analysis of Suspen–Dome structures, Finite Elem Anal Des, 2010, 46: 743–750.

[17] Cui X Q, Guo Y L. Influence of Gliding Cable Joint on Mechanical Behavior of Suspen–Dome Structures, Int J Space Struct, 2004, 19(3):149–154.

[18] Nie J G, Chen B L, Xiao J C. Nonlinear static analysis of continuous cables with sliding at the middle supporting (in Chinese), Chinese Journal of Computational Mechanics, 2003, 20(3): 320–324.

[19] Wei J D. Cable Sliding at Supports in Cable Structures, Journal of Southwest Jiaotong University (English Edition), 2004, 12(1): 56–60.

[20] Shen Z Y, Tang R W, Zhong Z X. Accurate Form–Finding Method for Cable Dome Based on Catenary Element (in Chinese), Journal of Tongji University (Natural Science), 2006, 34(1): 1–6.