基于群论的预应力结构广义特征值分析

陈 耀 冯 健

（东南大学混凝土及预应力混凝土结构教育部重点实验室 南京 210096

国家预应力工程技术研究中心 南京 210096）

摘 要：由于常规自振分析方法未能充分利用结构的固有对称性，当结构自由度增加时，计算消耗显著提升。本文基于群论方法，提出一种分析对称型预应力结构动力特性的高效方法。首先，结合一致质量矩阵及切线刚度矩阵建立了预应力结构的广义特征方程，并考虑初始预应力对结构的影响，以求解结构的自振频率及振型。随后，建立对称坐标系，将刚度矩阵及质量矩阵分解为一系列分块对角化矩阵。由于各分块子矩阵相互独立，广义特征值问题的求解难度显著降低，从而能高效求解结构的自振频率及相应振型。数值算例阐明了所提出方法的基本计算过程及显著优势。与有限元结果及常规方法所得结果比较后可知，基于群论的对称方法准确、高效。

主题：结构分析；对称；特征值；预应力

关键词：预应力结构 自振频率 群论 对称 广义特征值问题

DOI: 10.13211/j.cnki.pstech.2015.05.001

1 前言

现代预应力结构主要由索、杆、梁等构件组成，在世界各地逐渐得以应用，它们因其独特的结构外形以及较强的跨越能力受到建筑师和结构师的青睐。通常，在初始态下这些预应力结构包含内部机构位移模态，当施加合适的预应力后，形成一定的结构刚度，从而达到稳定的平衡状态。

最近，预应力结构受广泛研究，主要包括形态分析（Pellegrino and Calladine 1986; Pellegrino 1990）、稳定性分析（Gunnar 1999；Zhang et al. 2009b ）以及优化分析（Yuan and Dong 2003；Kitipornchai et al. 2005 ）等。然而，针对现代预应力结构的动力分析研究却极少。实际上，对于一个结构而言，固有振动是非常重要一项内在力学特性，它直接影响结构在动态作用下的反应。因此，有关预应力结构固有振动特性的分析十分重要。有学者采用有限元方法分析了Giger型索穹顶的自振特性（Luo and Wang 2005），研究已经发现该类型结构的自振频率相当低，并且分布集中。Zhang等人（Zhang 2007）对张弦梁结构的固有频率进行了研究，文中解释说明了索结构的张拉以及不同边界条件对动力特性的显著影响。Wu和Sasaki（Wu and Sasaki 2007）采用数值方法对索拱结构的静态和动态特性进行了研究，他们所求得的拱的固有振动的结论与试验值吻合非常好。

从数学角度来看，结构的自振频率可以通过求解关于结构切线刚度矩阵和质量矩阵的广义特征值方程直接获得。然而，由于结构自由度的增加，计算需求也显著增加。在这种情况下，我们必须采取有效的求解方法。Kaveh和Rahami（2007a, b）研究了三对角线矩阵和五对角线矩阵，并且提出了有效的分解方法。之后，有学者提出了结合拓扑学和图论的数值解法，用于解决圆柱形网格结构的特征值问题（Kaveh and Rahami 2008）。由于大部分结构要么是对称的，要么是由重复的子结构组成，群论可有效简化这些对称结构的广义特征值分析。在物理和化学领域，基于群论的对称学方法已经被证明是一个非常强大的数学工具（Ceulemans and Fowler 1991），然而，在土木工程领域却鲜有应用。最近几年，群论逐渐被用于一些结构力学的研究（Healey and Treacy 1991；Zingoni 1996，2005，2008；Mohan and Pratap 2004；Kaveh and Nikbakht 2007，2010；Kaveh and Rahami 2010a）。Kangwai 等人（Kangai

基金项目：国家自然科学基金项目(51278116)、东南大学优秀博士学位论文基金项目(YBJJ1025)、江苏高校优势学科建设工程资助项目

et al. 1999）具体解释了如何运用群论求解对称结构的对称坐标系。最近，也有文著综述了群论方法在结构工程分析研究中的应用情况和优点（Zlokovic 1989；Zingoni 2002，2009）。

然而，很少有研究涉及到对称型预应力结构的求解，这是由于预应力结构借助合理的预应力来获得其自身稳定。Pandia Raj 和Guest（Pandia Raj and Guest 2006）利用群论来简化张拉整体结构的找形过程。他们发现，平衡矩阵和应力矩阵均能够被对角化。Kaveh等人（Kaveh et al. 2010）利用图论进了预应力索网结构的频率分析，其中相关矩阵可实现完全的分块对角化，因而能高效地获得自振频率。在此研究基础上，本文将对具有复杂对称性的现代预应力结构进行更为系统的广义特征值分析。

2 基本理论

2.1 基本假定及广义特征值方程

需指出，文中采取以下假定：

（a）所有节点均视为铰接连接；

（b）索和撑杆假定为直线单元，且应力-应变关系为线弹性；

（c）各单元自重平均分配到两端；

（d）结构的固有振动模式为简谐振动。

忽略阻尼作用，预应力结构的广义特征值方程为：

$$K\phi-\omega^2M\phi=F=0 \quad (1)$$

式中，M为具有m个节点的d维结构（d=2或d=3）的$md\times md$ 对称质量矩阵；

K为$md\times md$ 对称切线刚度矩阵；

ω为结构自振频率构成的向量；

ϕ为相应的$md\times 1$振型矩阵。

具有b个单元的预应力结构的切线刚度矩阵可以写成：

$$K=H\widetilde{G}H^T+(C^T\bar{t}C)\otimes I_d \quad (2)$$

式中，H为$md\times b$平衡矩阵，描述单元内力与节点外力的关系；

$\widetilde{G}$为$b\times b$对角矩阵，其包含单元的修正轴向刚度（Guest 2006；Zhang et al. 2009a）；

I_d为$d\times d$的单位矩阵；

$\otimes$表示克罗内克积；

$\bar{t}=t/l$是$b\times b$的应力矩阵，它反应了单位长度的应力等级t，l为长度矩阵；

C是$b\times m$的拓扑矩阵，它描述了几何拓扑关系，如果单元k连接节点i和j，那么矩阵的第i行、j行、k行分别为1、-1和0。

2.2 群论及其矩阵表示

采用群论方法（Kaveh and Nikbakht 2007；Zingoni 2009）或图论-代数方法（Kaveh and Fazli 2010; Kaveh and Raham 2010b），能够对对称结构进行深入系统的研究。本节，首先将对群论及其矩阵表示的概念作一些简单介绍。

群集$G=\{g_i, i=1,2,\ldots,n\}$是系列独立元素的集合，并满足以下四项准则：

（i）必须包含单位元素：存在$E\subset G$，对于任何元素$g_i\subset G$，总存在$g_i\cdot E=E\cdot g_i=g_i$；

（ii）任何两个元素的运算结果仍是群集的元素，例如$g_1\subset G$，$g_2\subset G$，那么$g_1\cdot g_2\subset G$；

（iii）每个元素在群集中都有其逆元素，如$g_1\subset G$，则$g^{-1}\subset G$，反之亦然；

（iv）群集元素遵循结合律，例如：$(g_1\cdot g_2)\cdot g_3=g_1\cdot(g_2\cdot g_3)$。

为了描述一个结构的对称性，我们将各个对称操作视为群集的独立元素。对称操作是一种特定的操作，在对称操作下，结构变换后的几何构型与原几何构型完全等效（几何上无法识别）。我们可以用矩阵的方式描述在对称操作下节点坐标X的变换和节点荷载F的变换：

$$X=R\widetilde{X},\ 且F=R\widetilde{F} \quad (3)$$

式中，$\widetilde{X}$和$\widetilde{F}$分别是在对称坐标系下节点坐标矩阵和节点荷载矩阵，矩阵R是对应的转换矩阵。在对称操作作用下，转换矩阵R可表示为：

$$R=S_y\otimes r \quad (4)$$

式中，S_y是描述一个结构固有对称性$m\times m$的拓扑矩阵。在对称操作下，若将笛卡尔坐标系中某节点j转换到节点i，则拓扑矩阵可通过取第j行与第i行分别为1和0获得。r是从节点j坐标转换到节点i坐标的$d\times d$的局部转换矩阵。在此，以一个简单的二维对称索杆结构为例，如图1所

示。在绕原点O旋转π角度的对称操作下（用C_2表示），节点1到节点6分别由初始节点3、4、1、2、6和5转换而来。因此，对这一特定的对称操作，转换矩阵表示为：

$$R=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}\cos(\pi)&-\sin(\pi)\\\sin(\pi)&\cos(\pi)\end{bmatrix} \quad (5)$$

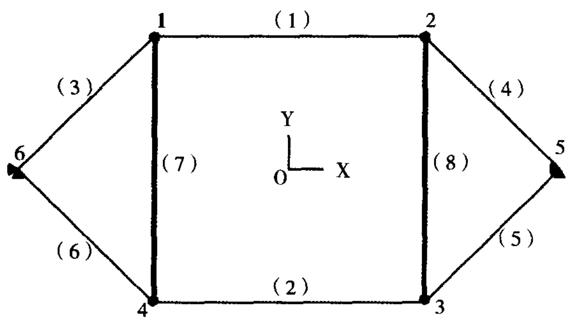

图1　二维C_{2v}对称索杆结构

在对称操作（C_2）下，公式（5）中2×2的局部转换矩阵r使得每个节点的x和y轴变成相反的方向。实际上，所有类似于公式（5）中的转换矩阵均为稀疏矩阵，因此能够被继续化简，其分解后的子矩阵被称为不可约表示Γ^{μ}。当然，对于不同的点对称群，所对应的对称操作、不可约表示均能够从一些群论书籍中直接查阅得到，例如参考文献Altmann and Herzig（1994）和Kettle（1995）。

在土木工程领域，传统的对称预应力结构包括周期对称性结构（如重复的张拉整体结构），或环向轴对称（如索穹顶结构）。需指出，周期对称结构中包含重复的基本单元，在同一方向以同等距离平移对称操作，移动结构所有的节点和单元。为了使用平移对称性研究周期对称结构，需要忽略影响局部力学性能的结构边界条件。值得一提的是，本文仅考虑属于环向对称群C_{nv}的对称预应力结构。三种不同的对称操作构建了环向对称群C_{nv}：全等操作E，沿主轴逆时针旋转操作C_n^i（i=1, 2⋯n−1），以及沿包含相应主轴的平面镜像操作σ_j（j=1, 2⋯n）。这2n个对称操作满足群集的所有四个准则要求，因此能够构建成一个封闭的对称群集。文中，以笛卡尔坐标系中的z轴规定为主轴，而平面xoy与用于镜像操作的镜面平面相互垂直。

表1归纳了环向对称群C_{nv}的不可约矩阵表示。对称群C_{nv}总计有2α+2 个一维的不可约矩阵表示及p个二维的不可约矩阵表示，其中

$$p=\frac{n-1-\alpha}{2}\ 且\ \alpha=\begin{cases}0 & \text{when } n \text{ is odd}\\1 & \text{when } n \text{ is even}\end{cases} \quad (6)$$

表1　环向对称群C_{nv}的不可约矩阵表示Γ^{μ}

$\Gamma^{\mu}\backslash I$	E	C_n^i（i=1,2,⋯,n−1）	σ_j（j=1,2,⋯,n）	位移与转角
A_1	1	1	1	z
A_2	1	1	−1	R_z
B_1	1	$(-1)^i$	$(-1)^j$	
B_2	1	$(-1)^i$	$(-1)^{j-1}$	
E_1	1　0	C_i　$-S_i$	C_j　S_j	(x, y)
	0　1	S_i　C_i	S_j　$-C_j$	(R_x, R_y)
E_k	1　0	C_{ik}　$-S_{ik}$	C_{jk}　S_{jk}	
k=2,⋯,p	0　1	S_{ik}　C_{ik}	S_{jk}　$-C_{jk}$	

注：表中B_1行与B_2行当且仅当n为偶数时成立，且表中$S_{ik}=\sin\left(\frac{2ki\pi}{n}\right)$，$C_{ik}=\cos\left(\frac{2ki\pi}{n}\right)$

2.3 对称型刚度矩阵及对称型质量矩阵

通过对群论中非常重要的广义正交定理，可以推导出关于一维不可约矩阵表示Γ^{μ}的对称子空间$V_{\Gamma^{\mu}}$为：

$$V_{\Gamma^{\mu}}=F\left(\sum_I \Gamma_I^{\mu}\cdot R_I\right) \quad (7)$$

式中Γ^{μ}=A_1, A_2, B_1, B_2，对称操作I=E, C_n^1, ⋯C_n^{n-1}, σ_1, σ_2, ⋯σ_{nc}，并定义函数$F(x)$用于求解变量矩阵x的列空间。

此外，关于二维不可约矩阵表示的对称子空间为：

$$V_{\Gamma^{\mu}}(j)=F\left(\sum_I \Gamma_I^{\mu}(j,j)\cdot R_I\right) \quad (8)$$

式中j=1, 2，且对称操作与式（7）中相同。因此，用于将坐标和荷载转换到对称坐标系下的正交转换矩阵V为：

$$V=\sum_{\Gamma^{\mu}=A_1}^{E_p}\oplus V_{\Gamma^{\mu}} \quad (9)$$

随后，可将对称型坐标矩阵和外力矩阵写成如下形式：

$$\widetilde{X}=V^{T}X,\ F=V^{T}F \tag{10}$$

考虑到位移矩阵ϕ可表示为节点坐标的线性变换，可以得出：

$$\widetilde{\phi}=V^{T}\phi \tag{11}$$

因此，求得对称型刚度矩阵为：

$$\widetilde{K}=V^{T}KV=\begin{bmatrix} \widetilde{K}_{A_1} & & & & & \\ & \widetilde{K}_{A_2} & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \widetilde{K}_{E_{12}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & \widetilde{K}_{E_{p1}} & \\ & & & & & \widetilde{K}_{E_{p2}} \end{bmatrix} \tag{12}$$

根据本文第2.1节所列的基本假定，可知单元和节点的自重与对应的节点相关。所以，与节点位移的转换矩阵类似，可将质量矩阵转换成对称型分解矩阵，即：

$$\widetilde{M}=V^{T}MV=\begin{bmatrix} \widetilde{M}_{A_1} & & & & & \\ & \widetilde{M}_{A_2} & & & 0 & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \widetilde{M}_{E_{12}} & & \\ & & & & \ddots & \\ & 0 & & & \widetilde{M}_{E_{p1}} & \\ & & & & & \widetilde{M}_{E_{p2}} \end{bmatrix} \tag{13}$$

式（12）和式（13）表明，对称型刚度矩阵$\widetilde{K}$和对称型质量矩阵$\widetilde{M}$已经被分解为分块对角化矩阵，并且包含了$p+2\alpha+2$ 个沿对角线分布的子矩阵。因此，可通过独立求解每个子矩阵$\widetilde{K}_i$及其相应的$\widetilde{M}_i$，求解相关矩阵的特征值，即：

$$\widetilde{\omega}_i^{2}\widetilde{M}_i\widetilde{\phi}_i-\widetilde{K}_i\widetilde{\phi}_i=0 \tag{14}$$

式中$i=A_1, A_2, \ldots, E_p$。因而，我们可以有效获得属于对称子空间$V(i)$的自振频率$\widetilde{\omega}_i$和自振模态$\widetilde{\phi}_i$。由于相似变换并不改变矩阵的特征值，所以求得的特征值即为原结构的自振频率，也就是$\widetilde{\omega}_i=\omega_i$。原结构的自振模态可表述为：

$$\phi_i=V(i)\widetilde{\phi}_i \tag{15}$$

以上分析过程表明，原有的关于$3m$个自由度的结构自振分析可以通过独立求解$p+2\alpha+2$个广义特征方程获得。

3 数值算例

为了验证本文所提对称方法的准确性和有效性，本节将列出一些关于对称预应力结构的实例。其中，结构构型（主要是节点和单元的编号）将合理排列，从而满足对称法的要求，并且便于生成对称拓扑矩阵（公式（4）所定义的S_y）。此外，利用传统方法进行了分析和比较，从而验证利用群论方法所得结果的可靠性。应当指出，对称法和传统数值法均运行于相同的硬件平台（英特尔奔腾双核2.0GHZ）。在此还需指出，算例中除非特殊说明，索和撑杆的弹性模量分别为E_{cable}=1.9e5MPa、E_{strut}=2e5MPa，所有单元的质量密度均为ρ=7850kg/m^3。

3.1 C_{2v}对称索杆结构

首先，以一个简单的二维C_{2v}对称索杆结构为例，详细描述采用群论方法求解对称预应力结构自振频率的基本过程。结构如图1所示，图中给出了节点和单元的编号以及边界条件。水平索（单元1–2）和撑杆（单元7–8）的松弛长度为$L_H=L_S$=2000mm，竖直索（单元3–6）的松弛长度为L_v=1414.21mm。索的截面面积为A_{cable}=500mm^2，撑杆的截面面积为A_{strut}=3000mm^2。我们对水平索施加初始预应力大小为100kN，其它单元的预应力大小可根据来自平衡矩阵H的自应力模态来确定。

由节点1–8构建成的C_{2v}对称索杆结构在以下对称操作作用下能转换成等效的构型：全等变换（E）、绕原点旋转π（C_2）、对x轴镜像（σ_1）以及对y轴镜像（σ_2）。四个独立对称操作$\{E, C_2, \sigma_1, \sigma_2\}$组成了对称群$C_{2v}$。如表1（取$n$=2）和公式（9）所示，根据$C_{2v}$对称群中的不可约表示，$C_{2v}$对称索杆结构的正交转换矩阵$V$可推导求得，见式（16）。

$$V=0.5\times\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad A_1 \quad & \quad A_2 \quad & \quad B_1 \quad & \quad B_2 \quad \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc:cc:cc:cc} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right| \end{array} \tag{16}$$

矩阵V中含有4个对称子空间，其中在$V(A_1)$中，荷载和位移完全对称；$V(A_2)$中，它们为C_2旋转对称；$V(B_1)$中对称操作σ_1和

V（B_2）中σ_2被继续保留。由此可知，对称型刚度矩阵和对称型质量矩阵可通过公式（2）、（12-13）和（16）计算求得，其子矩阵如表2所列。

表2　　子矩阵的对称匹配刚度矩阵以及质量矩阵

子矩阵	A_1	A_2	B_1	B_2
$\widetilde{K}_i$（$\times\frac{E_{cable}A_{cable}}{L_H}$）	$\begin{bmatrix}13.3 & -0.7\\0.7 & 2.7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.7 & -0.7\\-0.7 & 0.7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}13.3 & -0.7\\-0.7 & 0.7\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.7 & 0.7\\0.7 & 2.7\end{bmatrix}$
$\widetilde{M}_i\{\times\rho[A_{cable}(L_H+L_v)+A_{strut}L_s]\}$	$\begin{bmatrix}0.5 & 0\\0 & 0.5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.5 & 0\\0 & 0.5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.5 & 0\\0 & 0.5\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0.5 & 0\\0 & 0.5\end{bmatrix}$

分块对角化刚度矩阵 $\widetilde{K}$ 和质量矩阵 $\widetilde{M}$ 包含四个沿对角线独立分布的2×2子矩阵。因此，我们可以通过求解子矩阵 $\widetilde{K}_i$ 和相应的$\widetilde{M}_i$（$i=A_1$，A_2，B_1，B_2）来求解特征值，具体公式如下：

$$\widetilde{\omega}_i^2\widetilde{M}_i\widetilde{\phi}_i-\widetilde{K}_i\widetilde{\phi}_i=0\text{式中}i=A_1, A_2, B_1, B_2 \quad (17)$$

应当指出，原结构共具有八个自由度，其频率分析被四个独立的二维问题所替代。表3详细列出了有预应力结构和无预应力结构的计算结果。

由表3可知，对称法求解结果与数值法完全一致。与此同时，对称法计算所耗时间仅为0.004s，而传统数值法所耗时间高达0.0156s。从数学的角度来讲，群论方法与传统数值法一样，但由于相关矩阵已被分块对角化，能够被独立求解，因而群论方法更为高效。

对模型A和型B进行比较可以发现，由于第1阶自振频率完全依赖于预应力的等级，所以C_{2v}对称索杆结构可通过预应力实现稳定。由于存在预应力，结构的低阶自振频率略增加了一些。

图2描绘了结构所有的自振振型，并根据式（15）给出了各振型所属的对称子空间。图中短箭头表示各节点的相对运动趋势，可以发现结构振型与其对称子空间关联的对称特性一致。模态5和8具有全对称性，这是由于他们来自对称子空间A_1。类似地，模态1和4具有旋转对称性，模态3和7关于 x 轴对称，而模态2和6关于 y 轴对称。

表3　　对称索杆结构的自振频率

模态		1	2	3	4	5	6	7	8
模型 A	对称法	9.14	138.72	163.10	237.17	325.36	341.40	729.54	729.68
	数值法	9.14	138.72	163.10	237.17	325.36	341.40	729.54	729.68
模型B	对称法	0	138.51	162.95	237.17	325.29	341.48	729.46	729.66
	数值法	0	138.51	162.95	237.17	325.29	341.48	729.46	729.66

注：模型A 与模型B 分别定义为有预应力与无预应力结构。

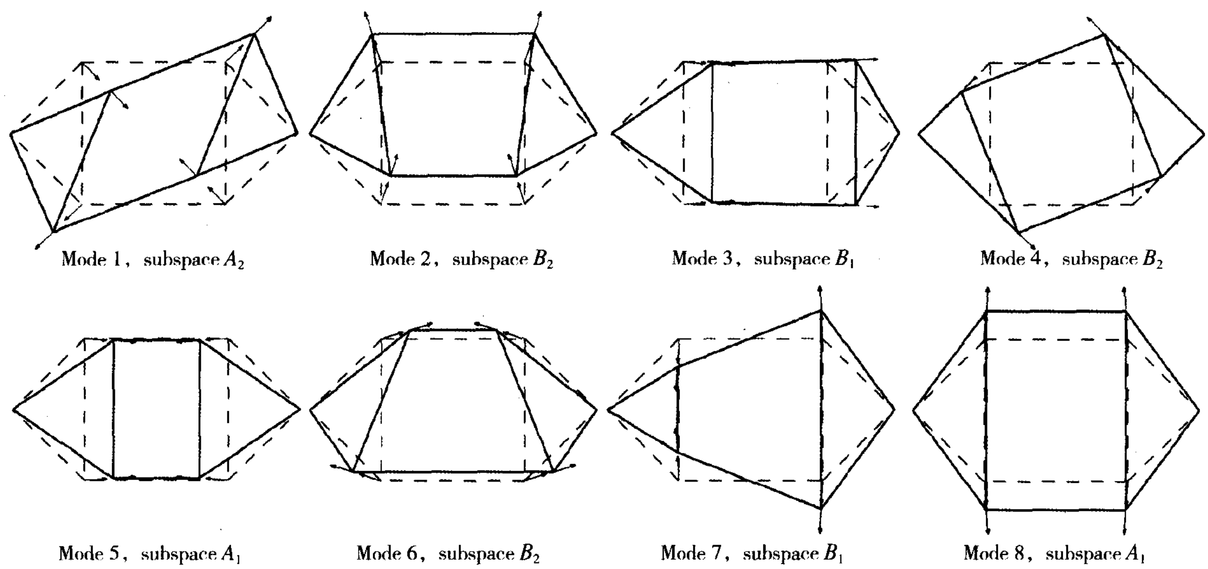

图2　对称索杆结构的自振振型

3.2 C_{6v} 对称索网结构

本节将分析一个由12个节点和12个索单元组成的三维索网结构，结构具有C_{6v}对称性。图3给出了结构的节点和单元编号，并给出了由6个主轴线1-6（σ_1-σ_6）定义的对称边界条件。在此，取径向索（单元1-6）的松弛长度为L_R=4000mm，环向索（单元7-12 ）的松弛长度为L_r=3000mm。索的横截面面积均为A_{cable}=1963.44mm²，所有单元的初始预应力大小均为566kN。

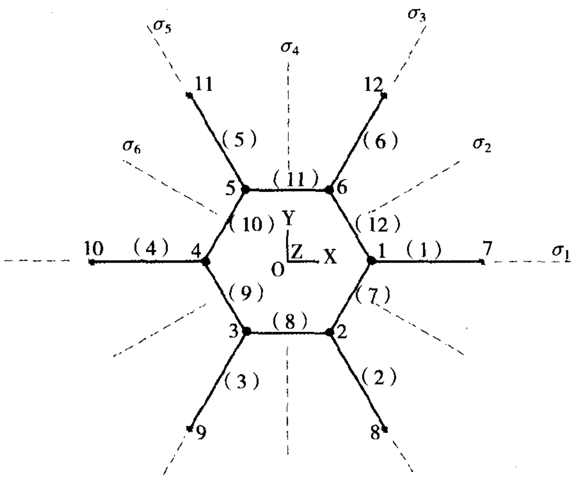

图3　三维C6v 对称索网结构

对称群C_{6v}由12个独立的对称操作组成，即对称群{E，C_6^1，C_6^2，C_6^3，C_6^4，C_6^5，σ_1，σ_2，σ_3，σ_4，σ_5，σ_6}。根据表1（取n=6）和公式（9）的不可约表示，C_{6v}对称索网结构的正交转换矩阵V为：

$$V=[V(A_1),\ V(A_2),\ V(B_1),\ V(B_2),\ V(E_{11}),\ V(E_{12}),\ V(E_{21}),\ V(E_{22})] \quad (18)$$

其中，各不可约表示关联的对称子空间如表4所示。

由表4可知，正交转换矩阵V中存在8个对称子空间。节点荷载和位移在V（A_1）中是完全对称的，并在V（A_2）中是旋转对称的。在V（B_1）中沿轴1、3、5 保持镜像对称及C_3旋转对称；在V（B_2）中沿轴2、4、6 镜像对称及C_3旋转对称。此外，结构在V（E_{11}）中保持σ_1对称，在V（E_{12}）中保持σ_4对称；它们在子空间V（E_{21}）中沿轴线1、4保持C_2旋转对称，在V（E_{22}）中亦保持C_2旋转对称。

由于所有非约束节点具有旋转对称属性，结构的对称型质量矩阵仍然保持原对角质量矩阵不变，且矩阵中元素M_i=0.5ρA_{cable}（L_R+2L_r）。表5给出了C_{6v}对称索网结构对称匹配刚度矩阵的子块：

表4　C_{6v}对称索网结构的不同对称子空间

对称子空间	矩阵表示
$V(A_1)$	[−0.41，0，0，−0.20，0.35，0，0.20，0.35,0，0.41，0，0，0.20，−0.35，0，−0.20，−0.35，0]^T
$V(A_2)$	[0，−0.41，0，−0.35，−0.20，0，−0.35，0.20，0，0，0.41，0，0.35，0.20，0，0.35，−0.20，0; 0，0，−0.41，0，0，−0.41，0，0，−0.41，0，0，−0.41，0，0，−0.41，0，0，−0.41]^T
$V(B_1)$	[−0.41，0，0，0.20，−0.35，0，0.20，0.35，0，−0.41，0，0，0.20，−0.35，0，0.20，0.35，0]^T
$V(B_2)$	[0，−0.41，0，0.35，0.20，0，−0.35，0.20，0，0，−0.41，0，0.35，0.20，0，−0.35，0.20，0; 0，0，−0.41，0，0，0.41，0，0，−0.41，0，0，0.41，0，0，−0.41，0，0，0.41]^T
$V(E_{11})$	[0，0，0，−0.43，−0.25，0，−0.43，0.25，0，0，0，0，−0.43，−0.25，0，−0.43，0.25，0; 0，0，0，0，0，0.50，0，0，0.50，0，0，0，0，0，−0.50，0，0，−0.50; −0.58，0，0，−0.14，0.25，0，−0.14，−0.25，0，−0.58，0，0，−0.14，0.25，0，−0.14，−0.25，0]^T
$V(E_{12})$	[0，0，0，0.25，−0.43，0，−0.25，−0.43，0，0，0，0，0.25，−0.43，0，−0.25，.0.43，0; 0，−0.58，0，−0.25，−0.14，0，0.25，−0.14，0，0，−0.58，0，−0.25，−0.14，0，0.25，−0.14，0; 0，0，−0.58，0，0，−0.29，0，0，0.29，0，0，0.58，0，0，0.29，0，0，−0.29]^T
$V(E_{21})$	[0，0，0，0.43，0.25，0，−0.43，0.25，0，0，0，0，−0.43，−0.25，0，0.43，−0.25，0; 0，0，0，0，0，0.50，0，0，−0.50，0，0，0，0，0，0.50，0，0，−0.50; 0.58，0，0，−0.14,，0.25，0，0.14，0.25，0，−0.58，0，0，0.14，−0.25，0，−0.14，−0.25，0]^T
$V(E_{22})$	[0，0，0，−0.25，0.43，0，−0.25，−0.43，0，0，0，0，0.25，−0.43，0，0.25，0.43，0; 0，0.58，0，−0.25，−0.14，0，−0.25，0.14，0，0，−0.58，0，0.25，0.14，0，0.25，−0.14，0; 0，0，−0.58，0，0，0.29，0，0，0.29，0，0，−0.58，0，0，0.29，0，0，0.29]^T

表5　对称型刚度矩阵的分块子矩阵

子矩阵	A_1	A_2	B_1	B_2	E_{11}
$\widetilde{K}_i\ (\times\frac{E_{cable}A_{cable}}{100L_R})$	$[23.33]$	$\begin{bmatrix}-0.03 & 0\\ 0 & -0.03\end{bmatrix}$	$[10]$	$\begin{bmatrix}39.97 & 0\\ 0 & -0.03\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}9.97 & 0 & -10\\ 0 & -0.03 & 0\\ -10 & 0 & 20\end{bmatrix}$

子矩阵	E_{12}	E_{21}	E_{22}
$\widetilde{K}_i\ (\times\frac{E_{cable}A_{cable}}{100L_R})$	$\begin{bmatrix}20 & -10 & 0\\ -10 & 9.97 & 0\\ 0 & 0 & -0.03\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}29.97 & 0 & -10\\ 0 & -0.03 & 0\\ -10 & 0 & -13.33\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}13.33 & -10 & 0\\ -10 & 29.97 & 0\\ 0 & 0 & -0.03\end{bmatrix}$

由表5可知，对称型刚度矩阵 $\widetilde{K}_i$ 被分块对角化，沿着主对角方向包含两个1×1的子矩阵块$\widetilde{K}_{A_1}$、$\widetilde{K}_{B_1}$；两个2×2的子矩阵块$\widetilde{K}_{A_2}$、$\widetilde{K}_{B_2}$；四个3×3的子矩阵块$\widetilde{K}_{E_{11}}$、$\widetilde{K}_{E_{12}}$、$\widetilde{K}_{E_{21}}$和$\widetilde{K}_{E_{22}}$。所以特征值可以通过求解每个子矩阵 $\widetilde{K}_i$ 及其相应$\widetilde{M}_i$（i=A_1，A_2，B_1，B_2，E_{11}，E_{12}，E_{21}，E_{22}），并作为相互独立的广义特征值问题来求解。随后，我们可以得到对称子空间$V(i)$的频率 ω_i 及自振模态 ϕ_i。自振模态可表示为：

$\phi_i=V(i)\,\widetilde{\phi}_i$，其中$i$=（$i$=$A_1$，$A_2$，$B_1$，$B_2$，$E_{11}$，$E_{12}$，$E_{21}$，$E_{22}$）　　（19）

图4给出了所得结果与常规数值结果的对比情况。可知，由群论方法所求得的频率与常规法十分吻合，二者之间的最大误差为9.4e–8，并且出现在自振模态的第14阶和18阶。需指出，两种方法在保持同等精度的情况下，常规数值法所需计算时间比对称法六倍还多，高达0.0781s 。

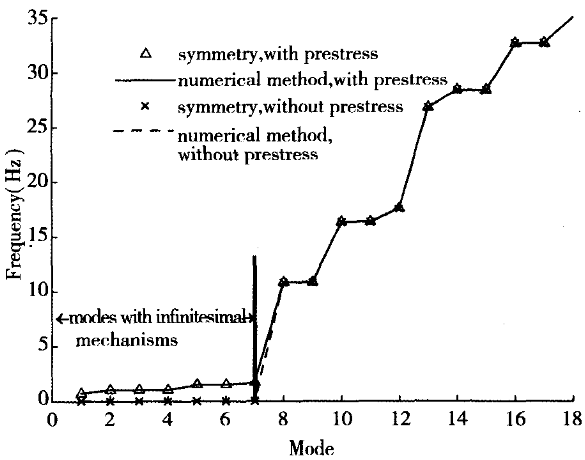

图4　对称索网结构的低阶自振频率

由于该索网结构的整体平衡矩阵H存在奇异值，前七阶自振模态对应着七个一阶无穷小机构位移。因此，如公式（2）所列的切线刚度矩阵所体现的，前七阶自振频率对结构初始预应力较为敏感。当结构不存在初始预应力时，相应的自振频率为零，如图4中下部虚线所示。即便如此，采用对称法仍然准确求得了无预应力索网结构的所有结果，与常规数值法的最大误差为2.57e –7。

图5为该对称索网结构的前12阶自振模态，可以看出，结构的第1阶自振模态为C_6对称，第3阶模态为C_6旋转对称，第7阶和第12阶模态均为C_3对称。因此可以确定，图5所示的结构自振模态均满足相应对称子空间的特征属性。

由于与二维不可约表示关联的对称子空间总存在重根，我们在数值计算之前即可据此推测出对称子空间E_{i1}和E_{i2}（i=1，2）将会产生相同的自振频率。事实也确实如此，图4和图5所示的结果证明了以上推断。模态2和模态4具有相同的自振频率，模态8和模态9具有相同的自振频率，这是由于它们均来自对称子空间E_1；类似地，模态5和模态6具有相同自振频率，模态10和模态11具有相同自振频率，它们都来自于对称子空间E_2。

3.3 C_{12v} 对称Levy型索穹顶结构

本节将围绕一个几何构型更为复杂的结构——即C_{12v}对称Levy型索穹顶结构，进行其广义特征值分析。Levy型索穹顶是一种新型的预应力索杆结构，由美国工程师Levy提出（Gerardo和Levy

1992）。此后，在世界范围内（尤其是美、日、韩等发达国家）已相继建成了一些典型的Levy型索穹顶结构，例如美国亚特兰大的乔治亚穹顶，结构跨度为233.5m × 186m。

图6给出了一个Levy型索穹顶结构的几何构型，该结构的圆直径为100m，图中也给出了结构的几何边界条件和对称性。该C_{12v}对称Levy型索穹顶结构由84个铰接节点和204个单元组成，其中12个外边界节点沿三个方向受到位移约束。所有单元包括3种撑杆和10种索，每一类型单元都包含12个绕z轴环向分布的单元。就群论所描述的对称性而言，该结构拥有1个全等变换操作E，11个旋转对称操作C_{12}^{1}–C_{12}^{11}，以及12个镜像对称操作σ_1–σ_2，如图6（a）所示。

表6具体给出了不同类型单元的横截面面积和初始预应力大小。

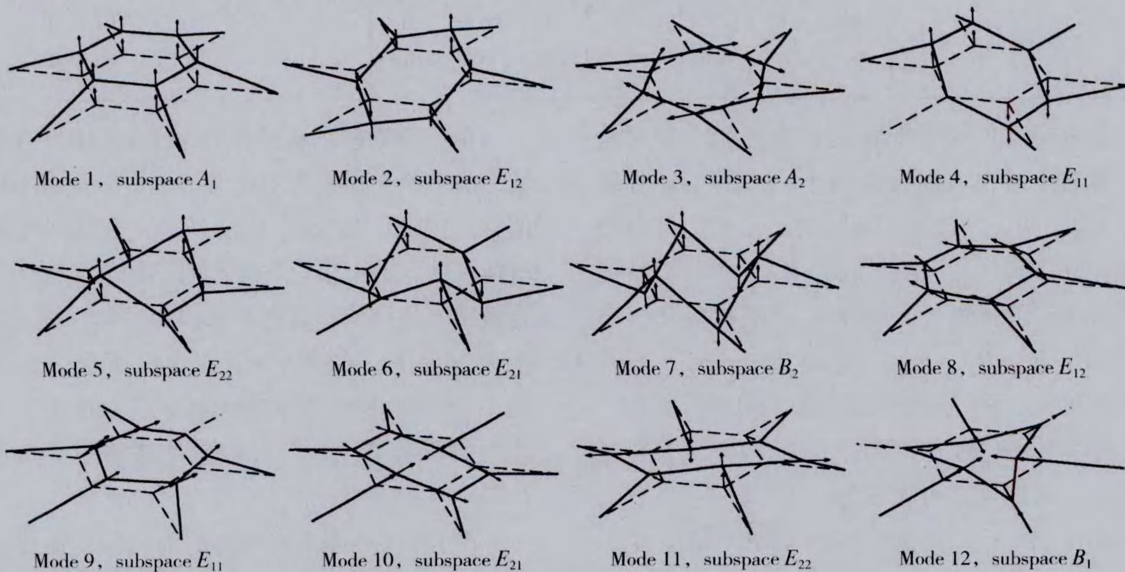

图5　对称索网结构的前12阶自振振型

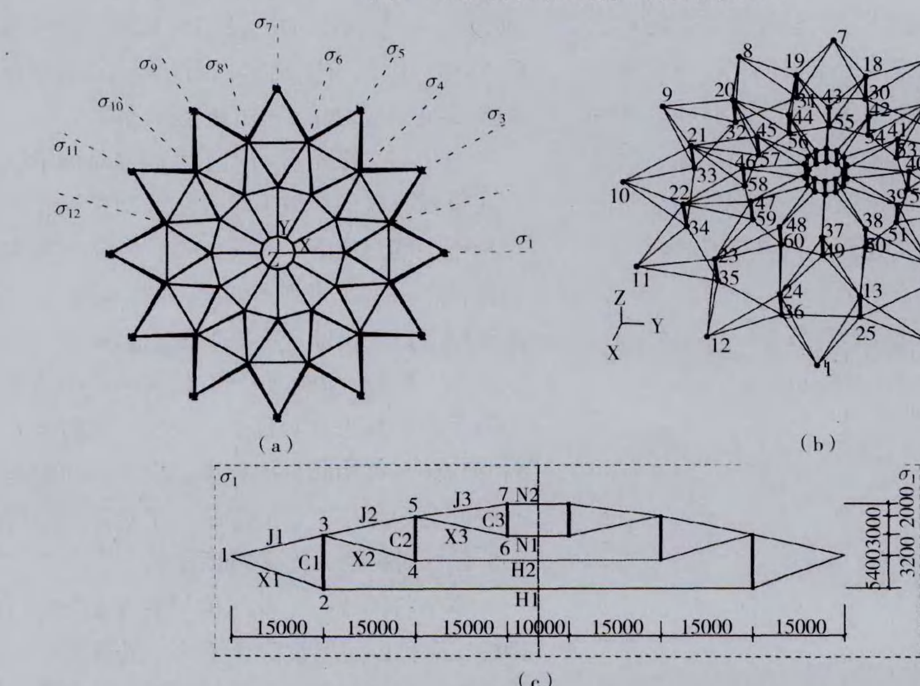

图6　C_{12v}对称Levy型索穹顶：（a）边界条件及对称条件；
（b）三维视图及节点编号；（c）镜面σ_1–σ_1中的不同类型与单元长度(mm)

表6　不同类型单元的截面积与初始预应力

单元类型	J1	J2	J3	X1	X2	X3	H1	H2	N1	N2	C1	C2	C3
面积/cm^2	36.7	32.7	24.9	42	36.7	16.7	52	36.7	24.9	14.2	66.3	32.8	27.5
预应力/kN	1343	644	392	901	688	248	1637	1307	469	750	−305	−126	−52

取表1中n=12，并结合公式（7-9），可以求得该C_{12v}对称索穹顶结构的正交转换矩阵V。矩阵V由14个向量空间组成，其中$V(A_1)$是一个216×12的矩阵，$V(A_2)$是一个216×6的矩阵，$V(B_1)$是一个216×10的矩阵，$V(B_2)$是一个216×8的矩阵，$V(E_{11})$–$V(E_{52})$均为216×18的矩阵。这14个独立的对称子空间用于将216×216的刚度矩阵和质量矩阵化简成14个维数更小的子矩阵。例如，结构的切线刚度矩阵被矩阵$V(A_2)$转换成：

$$\widetilde{K}(A_2)=V(A_2)^T\cdot K\cdot V(A_2)=$$

$$\begin{vmatrix} 23212310 & 0 & 0 & 17535 & 13286761 & 0 \\ 0 & 93630 & 9961 & -25898 & 0 & 0 \\ 0 & 9961 & 54783 & -16186 & 0 & 0 \\ 17535 & -25898 & -16186 & 21651565 & 12388557 & 0 \\ 13286731 & 0 & 0 & 12388557 & 49488403 & 34281 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 34281 & 37037145 \end{vmatrix}$$

图7 给出了由对称法求得的前100 阶频率，并与常规数值法计算结果进行了对比。另外，为了研究初始预应力对结构自振频率的影响，我们利用群论方法对不同预应力水平的C_{12v}对称索穹顶结构进行了参数分析，其中初始预应力水平分别取为0、0.25t、0.5t、t、2t 和4t。

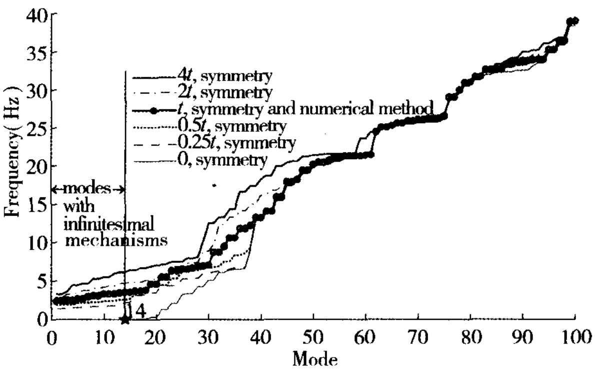

图7　不同预应力水平下C_{12v}对称索穹顶的前100 阶频率

由图可知，前28阶自振频率值非常小，且密集式分布。对称法所得结果与常规数值法十分吻合，其最大误差为1e-9。此外，算例再次证明了对称法比常规数值法更加高效，它们求取广义特征值所消耗的时间分别为0.063s和0.3594s。与一阶无穷小机构位移模态相关联的前14阶模态的频率值大小直接取决于初始预应力的大小，如图7所示。参考公式（2）可以发现，低阶频率值与预应力大小的平方根成正比。事实上，初始预应力也较好地改善了该索杆结构的刚度，提高初始预应力的水平后，结构的前50阶自振频率均显著增加。

图8描绘了结构的前12阶自振振型，可以注意到，索穹顶结构存在许多重复的特征值和等效的特征向量，例如模态1-2、模态3-4、模态5-6、模态8-9以及模态11-12 。其实，这种重根现象在对称结构中普遍存在，这是因为对于1≤i≤p，对称子空间$V(E_{i1})$和$V(E_{i2})$的特值征计算是完全相同的。另外，对称子空间$V(E)$的振型并不能保持其自身全对称性（C_{12v}），并且可能降阶为更低的对称性，譬如仅拥有单一镜像对称操作（对称群C_s），见图8。图中第7阶模态的振动形状和运动趋势可以从子空间A_2得到：根据对称群的降阶属性，该振型具有C_{12}旋转对称性。另外，第10阶振型之所以保持C_{12}全对称性称，是因为它来自于对称子空间A_1中。

4 结论

本文提出了一种基于群论的对称方法，能够高效求解对称型预应力结构的广义特征值问题（如自振分析）。根据所推导的对称坐标系，巧妙地将结构的切线刚度矩阵和质量矩阵进行了分块对角化，从而明显简化了广义特征值问题的求解复杂性，显著降低了计算工作量。针对三种不同对称类型的预应力结构（C_{2v}对称索杆结构、C_{6v}对称索网结构、C_{12v}对称Levy型索穹顶）的算例均表明，文中所提出的对称法是准确有效、可行的。

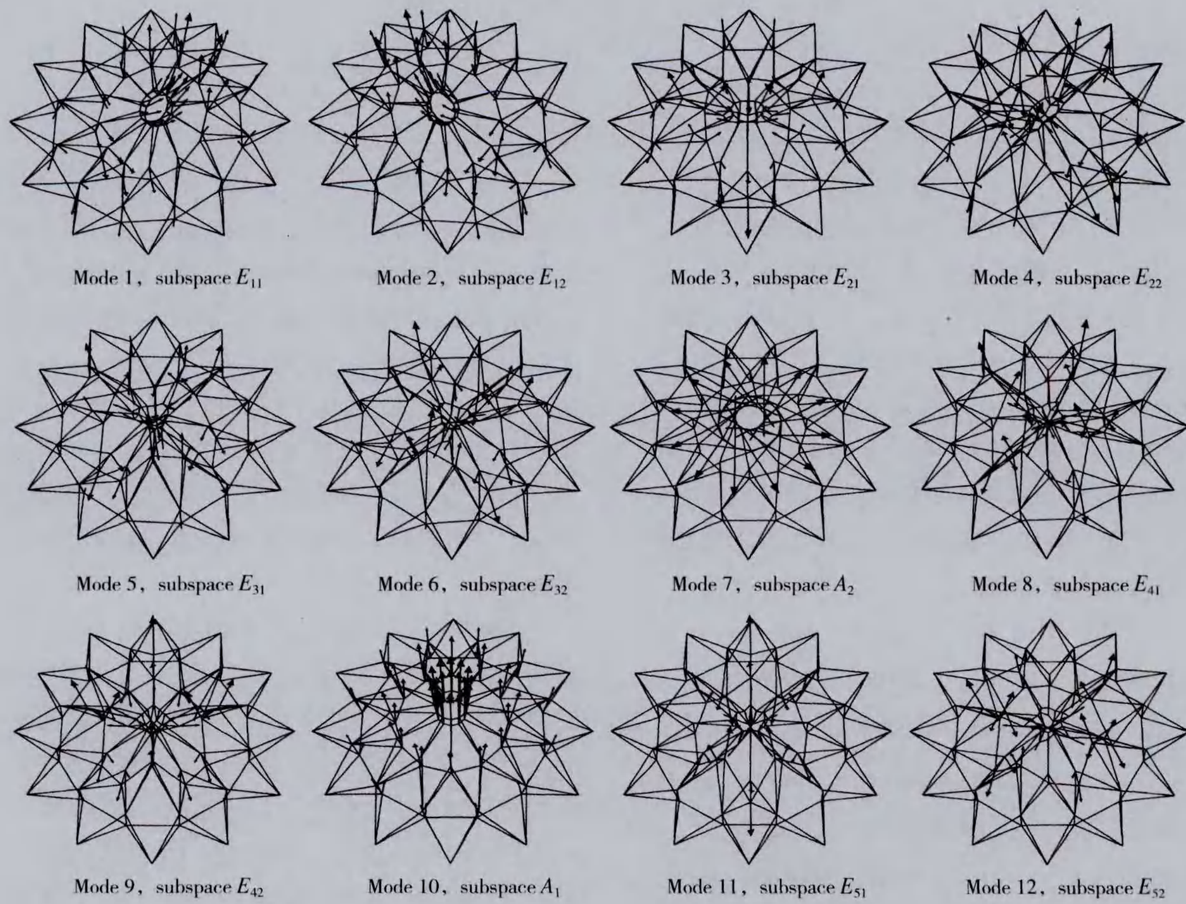

图8 C12v对称Levy型索穹顶结构的前12阶自振振型

参考文献

[1] Altmann, S. L., and Herzig, P. (1994). Point-group theory tables. Oxford: Clarendon Press.

[2] Ceulemans, A., and Fowler, P.W. (1991). “Extension of Euler’ s theorem to symmetry properties of Ployhedra.” Nature, 353(5), 52-54.

[3] Gerardo, C., and Levy, M. P. (June 7-9 1992). “Analysis of the Georgia Dome Cable Roof.” Proceedings of the Eighth Conference of Computing in Civil Engineering and Georgraphic Information Systems Symposium, ASCE. Dallas, TX.

[4] Guest, S.D. (2006). “The stiffness of prestressed frameworks: A unifying approach. ” International Journal of Solids and Structures, 43(3-4), 842-854.

[5] Gunnar, T. (1999). “Numerical analyses of cable roof structures.” M.S. thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm,Sweden.

[6] Healey, T. J., and Treacy, J. A. (1991). “Exact block diagonalization of large eigenvalue probelms for structures with symmetry. ” International Journal For Numerical Methods in Engineering, 31, 265-285.

[7] Kangwai, R. D., Guest, S. D., and Pellegrino, S. (1999). “An introduction to the analysis of symmetric structures.” Computers and Structures, 71(6), 671-688.

[8] Kaveh, A., and Fazli, H. (2010). “Eigensolution of augmented graph products using shifted inverse iterationmethod.” International Journal for Numerical Methods in Engineering, 83(5), 558-574.

[9] Kaveh, A., and Nikbakht, M. (2007). “Decomposition of symmetric mass-spring vibrating systems usinggroups, graphs and linear algebra.” Communications in Numerical Methods in Engineering, 23(7),639-719.

[10] Kaveh, A., and Nikbakht, M. (2010). “Improved group-theoretical method for eigenvalue problems of special symmetric structures, using graph theory. ” Advances in Engineering Software, 41(1), 22-31.

[11] Kaveh, A., and Rahami, H. (2007a). “Compound matrix block diagonalization for efficient solution of eigenproblems in structural matrices.” Acta Mechanica, 188(3-4), 155-166.

[12] Kaveh, A., and Rahami, H. (2007b). “Tri-diagonal and penta-diagonal block matrices for efficient eigensolutions of problems in structural mechanics.” Acta Mechanica, 192(1-4), 77-87.

[13] Kaveh, A., and Rahami, H. (2008). “Topology and graph products; eigenproblems in optimal structuralanalysis.” Communications in Numerical Methods in Engineering, 24(11), 929-945.

（下转第25页）

in Fiber-Reinforced Concrete. J Compos Constr 2012; 16(4); 371-380.

[23] Fang Z, Liang D and Jiang T. Experimental investigation on the anchorage performance of CFRP tendon in different bond mediums. Chn Civ Eng J 2006; 39(6); 47-51. (In Chinese)

[24] Jiang T and Fang Z. Theoretical and experimental investigation on anchorage performance of CFRP tendon in RPC. Engineering Mechanics 2009; 1; 166-173. (In Chinese)

[25] Zhang B and Benmokrane B. Design and evaluation of a new bond-type anchorage system for fiber reinforced polymer tendons. Can J Civ Eng 2004; 31(1); 14-26.

[26] Chen M, Chen G, Fang Z, Zhang K, Hu J, Liu R, et al. Large-scale ground anchorage system with high performance materials. Proc, 28th Annual Int Bridge Conf, David L Lawrence Convention Center, Pittsburgh, Pennsylvania, USA; 2011;694-699.

[27] Richard P. Composition of Reactive Powder Concrete. Cement and Concrete Research 1995; 25; 1501-1511.

[28] Feylessoufi A, Villieras F and Richard P. Water environment and nonstructural network in a reactive powder concrete. Cement and Concrete Composites 1996; 18(6); 203-209.

[29] ACI 440 3R. Guide Test Methods for Fiber-Reinforced Polymer (FRP) Composites for Reinforcing or Strengthening Concrete and Masonry Structures. ACI Committee 440, American Concrete Institute; 2012.

[30] ACI 440K. Guide test methods for fiber reinforced plastic (FRP) rods and sheets. 2001 Fall Convention, ACI Committee 440, American Concrete Institute, Dallas, Tex; 2001.

（上接第12页）

[14] Kaveh, A., and Rahami, H. (2010a). "Block circulant matrices and applications in free vibration analysis of cyclically repetitive structures." Acta Mechanica, 217(1-2), 51-62.

[15] Kaveh, A., and Rahami, H. (2010b). "An efficient analysis of repetitive structures generated by graphproducts." International Journal for Numerical Methods in Engineering, 84(1), 108-126.

[16] Kaveh, A., Rahami, H., and Nikbakht, M. (2010). "Vibration analysis of regular structures by graphs products: cable networks." Computers and Structures, 88, 588-601.

[17] Kettle, A.S.F. (1995). Symmetry and Structure, second edition. West Sussex, England: John Wiley & Sons Ltd.

[18] Kitipornchai, S., Kang, W., Lam, H.F., and Albermani, F. (2005). "Factors affecting the design and construction of Lamella suspen-dome systems." Journal of Constructional Steel Research, 61(6), 764-785.

[19] Luo, Y.Z., and Wang, R. (2005). "Study on dynamic characteristics and behavior of cable dome subjectedto multi-dimensional and multi-point seismic excitations." Journal of Zhejiang University (Engineering Science), 39 (1), 39-45.

[20] Mohan, S.J., and Pratap, R. (2004). "A natural classification of vibration modes of polygonal ducts basedon group theoretic analysis." Journal of Sound and Vibration, 269(3-5), 745-764.

[21] Pandia Raj, P., and Guest, S.D. (2006). "Using symmetry for tensegrity form-finding." Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures: IASS, 47 (3), December n. 152.

[22] Pellegrino, S. (1990). "Analysis of prestressed mechanisms." Internarional Journal of Solids Structures, 26(12), 1329-1350.

[23] Pellegrino, S., and Calladine, C. R. (1986). "Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate fameworks." Internarional Journal of Solids Structures, 22 (4), 409-428.

[24] Skelton, R. E., and Oliveira C. (2009). Tensegrity systems. Springer.

[25] Wu, M., and Sasaki, M. (2007). "Structural behaviors of an arch stiffened by cables." EngineeringStructures, 29(4), 529-541.

[26] Yuan, X.F., and Dong, S. L. (2003). "Integral feasible prestress of cable domes." Computers andStructures, 81, 2111-2119.

[27] Zhang, J. Y., Guest, S. D., and Ohsaki, M. (2009a). "Symmetric prismatic tensegrity structures: Part I. Configuration and stability." International Journal of Solids and Structures, 46(1), 1-14.

[28] Zhang, J. Y., Guest, S. D., and Ohsaki, M. (2009b). "Symmetric prismatic tensegrity structures. Part II: Symmetry-adapted formulations." International Journal of Solids and Structures, 46(1), 15-30.

[29] Zhang, X.Y., Li, G.Q., and Zhao, S.F. (2007). "Frequency techniques based cable tension estimation of beam string structures." Proceedings of International Conference on Health Monitoring of Structure, Materials and Environment (pp. 574-578).Nanjing, China: Southeast University Press, c2007.

[30] Zingoni, A. (1996), "An efficient computational scheme for the vibration analysis of high-tension cablenets." Journal of Sound and Vibration, 189 (1), 55-79.

[31] Zingoni, A. (2002). "Group-theoretic applications in solid and structural mechanics: a review." Computational Structures Technology, Saxe-Coburg Publications, Stirling, pp. 283-317.

[32] Zingoni, A. (2005). "On the symmetries and vibration modes of layered space grids." Engineering Structures, 27(4), 629-638.

[33] Zingoni, A. (2008). "On group-theoretic computation of natural frequencies for spring□mass dynamic systems with rectilinear motion." Communications in Numerical Methods in Engineering, 24(11), 973-987.

[34] Zingoni, A. (2009). "Group-theoretic exploitations of symmetry in computational solid and structuralmechanics." International Journal for Numerical Methods in Engineering, 79, 253-289.

[35] Zlokovic, G.M. (1989). Group theory and G-vector spaces in structural analysis. Ellis Horwood: Chichester (UK).