

考虑预应力实施过程的预应力钢结构 全过程优化设计

周 臻^{1,2} 孟少平^{1,2} 吴 京^{1,2}

(1 东南大学混凝土及预应力混凝土结构教育部重点实验室 江苏南京 210096

2 东南大学城市工程科学国际研究中心 江苏南京 210096)

摘 要:分析预应力实施过程对优化设计结果的影响,探讨预应力钢结构的全过程优化设计概念。在对预应力实施过程进行统一描述的基础上,建立预应力钢结构的全过程优化设计数学模型,并从索初始形变的角度出发,基于预应力钢结构的施工力学分析理论,探讨全过程分析的优化模型约束条件计算方法。最后,依据分级优化思想,将优化模型中的设计变量分为若干层次,构建优化模型求解的三级优化方法。算例结果表明,全过程优化设计方法具有较高的效率与良好的稳定性,能够考虑不同的预应力实施过程对优化结果的影响。如给定各次预应力阶段的张拉批次顺序,可同时输出相应的预应力阶段张拉控制力方案,从而实现结构设计方案与预应力实施方案的整体优化。

关键词:预应力钢结构 优化设计 预应力实施过程 三级优化方法

引言

近年来,预应力钢结构尤其是预应力空间结构在我国的发展非常迅速,应用也越来越广泛。在钢结构中通过拉索引入预应力,能够有效地提高结构承载力,控制结构变形,降低工程造价。研究表明,通过优化设计选择合理的设计方案,能够在保证结构安全性能的前提下,进一步提高预应力钢结构的经济效益^[1]。

在目前关于预应力钢结构优化设计的研究中,大多将荷载与预应力统一施加于结构之上,不考虑荷载和预应力的实施过程,只考虑各种不同荷载工况的情况,由此建立相应的优化设计模型与优化方法^[1,3]。针对预应力钢结构的理论分析表明,在设计阶段考虑不同的预应力实施方案(加载方案)能够产生不同的经济效果,具有不同的承载能力,这也是多次预应力钢结构设计的基本思想和理论依据^[4,5]。

本文在考虑预应力实施过程的基础上,建立了预应力钢结构的全过程优化设计模型,基于预应力钢结构的施工力学分析理论,构建了优化设计模型的三级优化分析方法,可在求解结构最优设计方案的同时,获得相应的合理预应力阶段张

拉控制力方案,实现结构从实施阶段到使用阶段的全过程最优设计。

1 考虑预应力实施过程的优化设计概念

首先,以一个简单的三杆结构算例探讨考虑预应力实施过程的优化设计概念。如图1所示,该结构由两根杆件和一根拉索组成,设计变量为杆件截面积 A_1 、拉索截面积 A_2 、预应力等效节点荷载为 T 。设杆件的容许应力 $[\sigma_g]$,拉索的容许应力 $[\sigma_s] = 2[\sigma_g]$,材料容重均为 ρ , A_1 最小值 $A_{1-1} = \sqrt{2}P / (20[\sigma_g])$,在此只考虑应力约束条件。

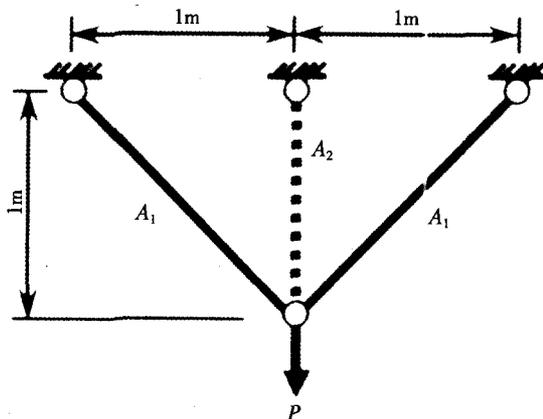


图1 三杆结构体系

假设单次预应力实施过程如图2所示,各阶段荷载为 $P_1 = 0.5P$ 和 $P_2 = P$ 。此时结构的实施过

本文荣获第四届欧维姆优秀预应力论文竞赛三等奖(原载《土木工程学报》2012.No.2)

程分为了3个阶段,此时建立结构的优化设计模型如下:

$$\begin{aligned} \min W(A_1, A_2, T) &= \rho(2\sqrt{2}A_1 + A_2) \quad (1) \\ \text{Subject to: } \sigma_g &\leq [\sigma_g] \quad \sigma_s \leq [\sigma_s] \end{aligned}$$

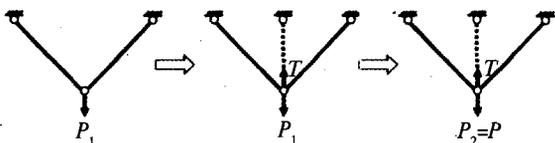


图2 单次预应力的实施过程

上述约束条件包含了3个阶段的应力约束。依据满应力准则,结构的重量 W 可表示为:

$$W = \left(\rho_{\max} \left[\frac{P}{[\sigma_g]}, \frac{2|0.5P-T|}{[\sigma_g]}, \frac{2|P-T|}{[\sigma_s]}, \frac{P}{5[\sigma_s]} \right] + \frac{P}{2[\sigma_s]} \right) \quad (2)$$

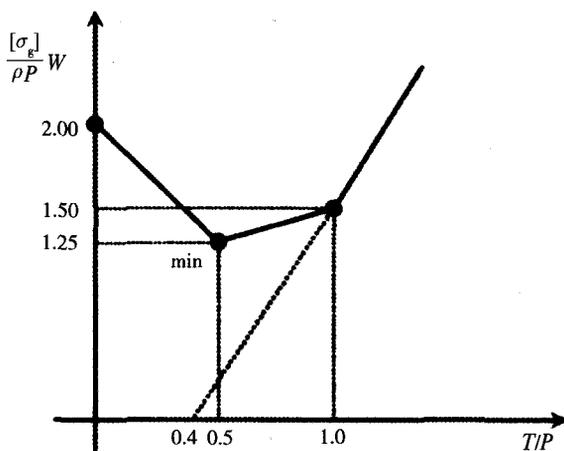


图3 W 与 T 的函数关系

将结构重量 W 与 T 的函数关系表示如图3所示。当 $T=0.5P$ 时, W 达到最小值。因此该结构的最优设计方案为 $W_I = 1.25\rho P / [\sigma_g]$,相应的预应力实施方案为:荷载 $0.5P \rightarrow$ 预应力 $0.5P \rightarrow$ 荷载 P 。

同理,如果采用多次预应力方案,在实施过程中施加两次预应力,将荷载三等分,即各阶段加载值为 $P/3$,则可得到多次预应力最优设计方案为 $W_{II} = \rho P / [\sigma_g]$,而相应的预应力实施方案则为:荷载 $P/3 \rightarrow$ 预应力 $P/3 \rightarrow$ 荷载 $2P/3 \rightarrow$ 预应力 $2P/3 \rightarrow$ 荷载 P 。

将上述两种情况下的结构重量 W 进行比较可

知: $W_{II} < W_I$,说明多次预应力实施过程的优化设计方案要比单次预应力节省20%的造价。由此可见,不同的预应力实施过程使得结构优化设计结果间可能存在较大差异,这也是考虑预应力实施过程的优化设计的基本思想。

2 全过程优化设计模型的建立

通过上述例子可知,预应力实施过程包含了两个方面:加载阶段(P)与预应力施加阶段(E),通过这两个阶段的划分与组合,能够形成多种不同的预应力实施方案,图4给出了实施过程的统一描述。当 $n=2$ 时,图4代表单次预应力的实施过程;当 $n \geq 3$ 时,图4则代表多次预应力的实施过程。由此可见,在考虑实施过程的结构优化设计中,单次预应力与多次预应力并无本质的区别,其不同之处只在于实施阶段数目的多少。

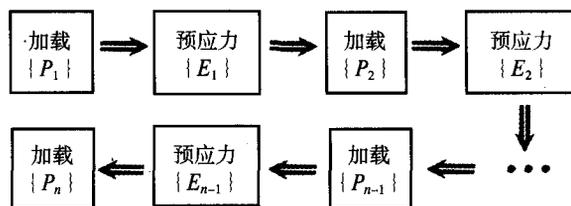


图4 预应力实施过程的描述

当考虑预应力实施过程时,实施过程中每一阶段对设计方案都有影响,需要考虑的因素更多、更复杂,因此,也可将其称为“全过程优化设计”。从预应力钢结构的实施过程来看,理论上设计变量应当包括杆件截面面积 A_g 、拉索截面面积 A_s 、每一阶段的加载大小 P_i 和预应力作用 E_i 。不过,实际工程中各阶段的加载大小值并不是一个可以任意规定的量,受到客观条件的制约。例如结构自重、屋面板重量等都需要根据实际客观条件计算,并不是任意的连续变量,即使优化得到了各阶段的加载大小取值,实际情况中也很有可能无法实现。因此加载取值 P_i 的优化可通过对若干种可能取值方案进行比选,从而在建立优化设计模型时,可以假定各阶段的加载取值已知,由此建立的预应力钢结构全过程优化设计数学模型如下:

$$\begin{aligned} \min I &= I(A_g, A_s, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n A_{gi} l_{gi} + G_s \sum_{i=1}^p A_{s0i} l_{si} \end{aligned} \quad (3)$$

subject to: 预应力实施各阶段及使用阶段各荷载工况作用下的应力、位移和设计变量等约束条件:

$$\text{应力约束: } \sigma_{gi} = N_{gi} / \varphi_b A_{gi} \leq [\sigma_g]$$

$$0 \leq \sigma_{si} = T_{si} / A_{si} \leq [\sigma_s]$$

$$\text{挠度约束: } \delta \leq [\delta]$$

$$\text{变量约束: } \underline{A}_{gi} \leq A_{gi} \leq \bar{A}_{gi}; \underline{A}_{si} \leq A_{si} \leq \bar{A}_{si}$$

式中: 目标函数 I 为结构造价, 设计变量为杆件截面积 A_g 、拉索截面积 A_s 和预应力作用 E , 需要注意的是, 虽然目标函数 I 的表达式中并没有出现预应力取值 E , 但 E 的大小会影响到杆件截面积 A_g 和拉索截面积 A_s 的取值, 因此相对于杆件和拉索截面积来说, 预应力作用对目标函数是以间接的形式产生影响的, 而这也正是预应力空间网络结构优化设计与普通空间网络结构相比所具有的特殊性; 约束条件中 σ_g 和 σ_s 为杆件和拉索最不利应力, δ 为结构最大挠度; $[\sigma_g]$ 为杆件应力容许值, $[\sigma_s]$ 为拉索应力容许值, $[\delta]$ 为结构挠度容许值; \underline{A}_g 为杆件许用截面面积下限值, \bar{A}_g 为杆件许用截面面积上限值; \underline{A}_s 为拉索许用截面面积下限值, \bar{A}_s 为拉索许用截面面积上限值; G_s 为预应力拉索与普通杆件的价格比值; l_{gi} 和 l_{si} 分别为杆件和拉索的长度。

3 基于全过程分析的约束条件计算

在全过程优化设计模型中, 约束条件不仅包含结构在使用期间的各种荷载工况, 同时还必须考虑预应力实施过程中的每一阶段, 因此可将其称之为“全过程约束”。“全过程约束”的计算必须通过“全过程分析”(即从预应力实施过程到使用阶段的结构分析)获得。需要注意的是, 全过程分析中每一阶段的分析结果都会影响后续阶段的分析, 因此每一阶段的分析都要以前一阶段分析结果为初始状态, 各阶段之间具有状态非线性的关系。由此可见, 全过程优化不能单独对某个阶段进行优化分析, 而要将所有阶段联系起

来进行整体优化。

研究表明^[6], 对于预应力钢结构的全过程分析, 以形变为基础的分析理论具有计算准确、计算量小的优点, 是预应力钢结构施工力学分析的有效方法。基于此, 将优化设计模型中的预应力作用 E 等价于拉索的初始形变(或初始缺陷长度), 即索的无应力长度(原长)与实际长度的差值, 由此可将预应力钢结构的矩阵力学模型表示为^[7]:

$$\text{平衡方程: } G^T S = P_0 \quad (4)$$

$$\text{物理方程: } S = K_e (\Delta - E) \quad (5)$$

$$\text{几何方程: } \Delta = N \delta \quad (6)$$

式中: G 为几何矩阵; G^T 为 G 转置, 即平衡矩阵; P_0 为节点荷载向量; S 为杆件内力向量; E 为初始形变向量, 应包括 2 个子向量: E^e 为索元的初始形变, $E^1 = 0$ 为非预应力杆元的初始形变; Δ 为杆件伸长量向量; δ 为节点位移向量; K_e 为单元刚度矩阵。

将物理方程式 (5) 和几何方程式 (6) 代入平衡方程 (4) 即可得到预应力钢结构的刚度法方程如下:

$$K \delta = P_0 + G^T K_e E = P_0 + P_1 \quad (7)$$

其中: $K = G^T K_e G$ 为结构整体刚度矩阵。

由式 (7) 可知, 只要索的初始形变 E 确定, 则结构的预应力状态就已确定下来, 能够进行任意荷载状态下的结构分析, 得到结构内力(包括索力)、位移等分析结果。而在进行预应力实施的全过程分析时, 由于索初始形变是状态量, 不随实施过程的进行而改变, 因此可采用顺序分析方法方便地进行计算。分析时考虑各预应力阶段的分批张拉过程, 具体方法如下:

荷载保持该阶段加载 iP 不变, 在第 i 次张拉第 j 批索时, 直接赋予第 j 批索相应的第 i 次初始形变, 保持前面 $j-1$ 批该次已张拉索的第 i 次初始形变不变, 后面各批索的初始形变则为第 $i-1$ 次初始形变, 由此求解下式:

$$(K - {}^i K_{sj}) \delta = {}^i P_0 + G^T (K - {}^i K_{esj}) {}^i E_j \quad (8)$$

式中: ${}^i E_j$ 为第 i 次张拉第 j 批索时的初始形变向量;

$${}^i E_j = \{e_1, e_2, \dots, e_j, {}^i e_{j+1}, \dots, {}^i e_n\} \quad (9)$$

式中： $K_{s,i} = G^T K_{esi} G$ 为张拉第*i*批索时，不参与结构工作索在整体坐标系下的刚度矩阵；*n*代表索的总批数。

按照基于式(8)的顺序分析方法，依次改变加载 ${}^i P_0$ 以及各阶段预应力作用 ${}^i E_j$ 的大小，就可对预应力实施过程进行全过程分析，求得各阶段的应力、位移、拉索索力，从而实现约束条件的计算。同时，由于在分析中考虑了预应力阶段的分批张拉，因此只要给定各次预应力的张拉批次顺序，则能够在求得优化设计方案的同时，输出相应的预应力张拉控制力实施方案，实现结构方案与预应力实施方案的整体优化设计。

4 优化模型求解的三级优化方法

预应力钢结构的优化设计，属于有约束非线性规划问题。仔细分析优化设计变量，不难发现杆件面积、拉索面积和预应力作用对目标函数影响的性质是不统一的。杆件面积和拉索面积直接影响目标函数结构造价，预应力的作用则对目标函数产生间接的影响，而拉索面积同时又影响预应力的作用。研究表明^[1]，如将预应力作用和杆件截面尺寸同时优化，往往会带来求解矩阵的病态，这种病态正是由于预应力作用和杆件截面尺寸在性质上的差异造成的。因此如直接同时对所有的设计变量进行优化，则很难建立合适的优化方法，不能保证优化过程的收敛性，优化得到的结果也不可靠。比较有效的解决办法是采取分级优化方法，即将具有同一性质的设计变量归于同一优化级别，根据各级优化问题的特点建立相应的各级优化算法，最后依据一定的逻辑关系将各级优化算法组织起来，形成整体问题的解法。基于上述思想，本文建立了预应力钢结构优化设计模型的三级优化方法，其逻辑关系及流程示意如图5和图6所示。

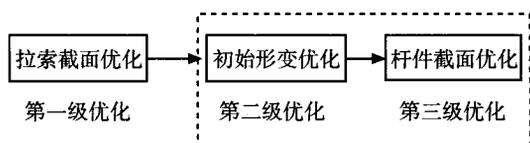


图5 三级优化方法逻辑关系图

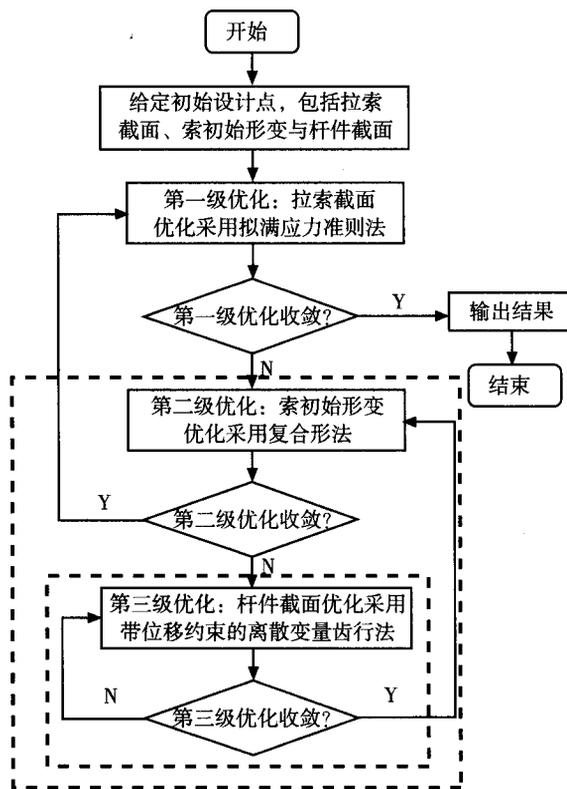


图6 三级优化方法的流程示意

(1) 第一级优化（拉索截面变量优化）

$$\min I = I(A_s) \quad (10)$$

$$\text{subject to } \underline{A}_s \leq A_s \leq \bar{A}_s \text{ and } \sigma_{s i, \max} < [\sigma_s]$$

式中： $\sigma_{s i, \max}$ 表示第*i*根拉索在各种荷载工况作用下和结构实施过程各个阶段的最大索应力。该级优化方法可采用满应力设计思想。

(2) 第二级优化（索初始形变变量优化）

$$\min I = I(D)$$

$$= \sum_{i=1}^n A_{g i} l_{g i} + G_s \sum_{i=1}^n A_{s 0} l_{s i} \sigma_{s i, \max} / [\sigma_s] \quad (11)$$

$$\text{subject to } D \geq 0 \text{ and } \sigma_{s i, \min} > 0$$

式中： $\sigma_{s i, \min}$ 表示第*i*根拉索在使用阶段各种荷载工况作用下和结构实施过程各个阶段的最小索应力； $A_{s 0}$ 为进行该级优化时所固定的拉索截面取值。该级优化方法可采用约束非线性优化方法中的复合形法^[8]。目标函数中考虑了经索应力比调整后的拉索造价，可保证收敛到较低的索初始形变。

(3) 第三级优化（杆件截面变量优化）

$$\min I_g = I_g(A_g) = \sum_{i=1}^n A_{gi} l_{gi} \quad (12)$$

$$\text{subject to } \delta \leq [\delta] \text{ and } \sigma_{gi} \leq [\sigma_g] \text{ and } \underline{A}_{gi} \leq A_{gi} \leq \bar{A}_{gi}$$

该级优化方法可采用带位移约束的齿行法^[8]。

5 数值算例

如图7所示,某拉索预应力网壳结构,结构跨度90m×99m,99m跨方向为一圆弧曲线,矢高1.6m,网格形式为正放四角锥。网壳跨中厚度为5m,边缘厚度约2.24m。杆件与拉索的弹性模量均为 $E_s=206\text{kN/mm}^2$,密度 $\rho=78.5\text{kN/m}^2$,杆件材料强度为 $\sigma_u=345\text{N/mm}^2$,索强度 $f_{ptk}=1570\text{N/mm}^2$,杆件允许最大应力 $[\sigma_g]=0.7\sigma_u=241.5\text{N/mm}^2$,拉索允许最大应力 $[\sigma_s]=0.4f_{ptk}=628\text{N/mm}^2$,最大允许位移为结构跨度的1/350。恒荷载:网架上弦层屋面系统荷载 0.4kN/m^2 、下弦层吊挂荷载 0.3kN/m^2 ;活荷载: 0.5kN/m^2 ;风荷载:基本风压 0.35kN/m^2 。考虑荷载工况为:①1.2恒荷载+1.4活荷载;②1.0恒荷载+1.4风荷载;③1.2恒荷载+1.4活荷载+ 0.85×1.4 风荷载。考虑预应力的实施过程为以下两种方案:①单次

预应力方案:自重→预应力→全部恒载;②两次预应力方案:自重→预应力→1/2恒载→预应力→全部恒载。在预应力阶段考虑如下的张拉顺序:从中间往两边采取对称张拉的方案,每次张拉两根预应力索。

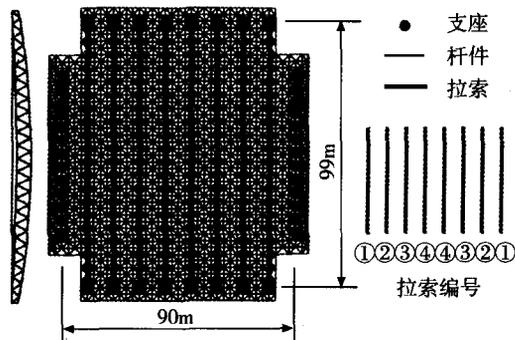


图7 算例结构示意图

按照本文建立的优化模型与优化方法,采用通用有限元分析软件ANSYS的APDL编程语言,编制了考虑预应力实施过程的预应力钢结构全过程优化设计程序。对本文中的数值算例,令 $G_s=1.0$,则其优化过程及优化结果如表1~表3所示。

表1 单次预应力实施方案的三级优化方法优化过程示意

拉索截面 迭代过程	复形法 迭代过程	索初始形变 (cm)				结构总重量 (kg)	最大位移/跨度	
		D_1	D_2	D_3	D_4			
$A_{s01}=A_{s02}=A_{s03}=A_{s04}=20\text{cm}^2$ $\sigma_1=289.6\text{MPa}$ $\sigma_2=425.7\text{MPa}$ $\sigma_3=691.6\text{MPa}$ $\sigma_4=862.5\text{MPa}$	初始复形	9.17	9.12	18.29	220.9	308853	1/350	
		32.57	59.76	55.79	50.94	325689	1/423	
		36.72	31.86	39.16	13.67	317676	1/381	
		18.42	40.74	53.25	26.72	305567	1/390	
		17.75	12.42	28.22	31.34	292543	1/365	
	1	26.37	40.38	38.69	41.26	322860	1/396	
	2	30.89	53.65	34.65	32.69	321787	1/411	
	
	11	12.58	19.35	29.65	35.97	279653	1/365	
	$\sigma_{s11}=9.22\text{cm}^2$ $\sigma_{s12}=13.6\text{cm}^2$ $\sigma_{s13}=22.0\text{cm}^2$ $\sigma_{s14}=27.5\text{cm}^2$ $\sigma_1=572.5\text{MPa}$ $\sigma_2=621.8\text{MPa}$ $\sigma_3=591.5\text{MPa}$ $\sigma_4=616.4\text{MPa}$		27.85	29.65	26.88	27.35	277149	1/372
	$\sigma_{s21}=8.4\text{cm}^2$ $\sigma_{s22}=13.5\text{cm}^2$ $\sigma_{s23}=20.7\text{cm}^2$ $\sigma_{s24}=27.0\text{cm}^2$ $\sigma_1=619.5\text{MPa}$ $\sigma_2=627.2\text{MPa}$ $\sigma_3=623.5\text{MPa}$ $\sigma_4=620.4\text{MPa}$		30.84	30.12	29.03	28.46	276585	1/369

基本达到满应力要求

表2 与优化设计结果相应的预应力阶段张拉方案

张拉阶段	①	②	③	④
张拉④	—	—	—	846
张拉③	—	—	765	824
张拉②	—	635	748	816
张拉①	408	623	742	810

表3 两种预应力实施方案的优化结果对比

预应力实施方案	结构重量 (kg)
单次预应力: 自重+预应力+全部恒载	276585
多次预应力: 自重+预应力+1/2恒载+预应力+全部恒载	255846

由表1可知,第二级优化采用复形法经过11次迭代能够收敛,而第一级优化则经过三次迭代后拉索应力达到允许应力值,实现了结构的最优设计,可见三级优化方法具有较高的求解效率。同时由于分级优化方法将不同性质的设计变量进行了分级,使得优化过程具有良好的稳定性。

表2给出了与优化设计结果相应的预应力阶段张拉方案,由于在模型约束条件的求解时采用了全过程分析方法,因此在完成结构设计方案优化的同时,能够自动输出结构的预应力张拉方案,为设计方案的实施提供依据。

表3中的两种预应力实施方案优化结果对比表明,多次预应力实施方案的优化结果比单次预应力优化结果要更优,预应力实施过程对于优化设计方案的影响在优化模型中得到了体现。

6 结论

在预应力钢结构中,通过预应力的“泵出效应”,能够使结构内力产生迁移,提高结构承载力,降低用钢量。如在设计阶段考虑预应力的实施过程能够产生不同的经济效果,例如多次预应力的实施方案由于反复多次地利用了材料弹性界限内的抗压与抗拉强度,因而比单次预应力能更加节约材料。本文分析了考虑预应力实施过程的优化设计概念,建立了预应力钢结构的全过程优化设计模型,分析了基于全过程分析的约束条件计算方法,并依据设计变量的不同性质,构建了优化模型求解的三级优化方法,得到结论如下:

(1) 通过加载阶段(P)与预应力施加阶段(E)的划分与组合,能够形成多种不同的预应力实施方案。当考虑预应力实施过程时,实施过程中每一阶段对优化设计过程都有影响,不能单独对

某个阶段进行优化分析,而要将所有阶段联系起来进行整体优化,即形成全过程优化设计模型。

(2) 在全过程优化设计模型中,约束条件不仅包含结构在使用期间的各种荷载工况,还必须考虑预应力实施过程中的每一阶段,因此需要采用全过程分析理论进行计算。基于索初始形变的预应力全过程分析方法能够依据预应力实施过程,方便求得各阶段的应力、位移、拉索索力,从而实现约束条件的计算。同时,只要给定各次预应力阶段的张拉批次顺序,还能在求得优化设计方案的同时,自动输出相应的预应力张拉控制力实施方案,实现结构设计方案与预应力实施方案的整体优化。

(3) 在优化模型的设计变量中,杆件面积、拉索面积和各阶段预应力作用对目标函数影响的性质是不统一的,如直接同时对所有的设计变量进行优化,往往会带来求解矩阵的病态,优化过程难以收敛。为此,可将具有同一性质的设计变量归于同一优化级别,根据各级优化问题的特点建立相应的各级优化算法,最后依据一定的逻辑关系将各级优化进行连接,形成稳定的三级优化方法。

参考文献

- [1] 邓华,董石麟. 拉索预应力空间网格结构的优化设计[J]. 计算力学学报, 2000, 17(2): 207-213 (Deng Hua, Dong Shilin. Optimal design of prestensioned lattice structures [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2000, 17(2): 207-213 (in Chinese)).
- [2] 薛伟辰,刘晟,苏旭霖等. 上海源深体育馆预应力张弦梁优化设计与试验研究[J]. 建筑结构学报, 2008, 29(1): 16-23 (Xue Weichen, Liu Sheng, Su Xulin, et al. Design optimization and experimental study on prestressed beam string of Shanghai Yuanshen Arena [J]. Journal of Building Structures, 2008, 29(1): 16-23 (in Chinese)).
- [3] 吴杰,张其林,罗晓群. 张拉整体结构预应力优化设计的序列两级算法[J]. 工业建筑, 2004, 34(4): 82-83 (Wu Jie, Zhang Qilin, Luo Xiaojun. A sequential two-levels algorithm for the optimization design of prestress of tensioned integral structure [J]. Industrial Construction, 2004, 34(4): 82-83 (in Chinese)).
- [4] 陆赐麟. 预应力钢结构的基本理论及方法[J]. 钢结构, 1998, 13(1): 52-59.
- [5] Zhang Ailin, Ren Weijie. Optimum design based on safety constraints of multi-stage pre-stressed steel structures [J]. China Civil Engineering Journal, 2005 (8): 26-30 (张爱林, 任维杰. 基于安全度约束的多次预应力钢结构优化设计[J]. 土木工程学报, 2005, 38(8): 26-30 (in English)).
- [6] 李永梅,张毅刚,杨庆山. 索承网壳结构施工张拉索力的确定[J]. 建筑结构学报, 2004, 25(4): 76-81 (Li Yongmei, Zhang Yigang, Yang Qingshan. Determination of cable forces during construction for cable supported lattice shells [J]. Journal of Building Structures, 2004, 25(4): 76-81 (in Chinese)).
- [7] 周臻,孟少平,吴京. 拱支预应力网架结构的预应力全过程分析方法[J]. 工程力学, 2007, 24(12): 93-99 (Zhou Zhen, Meng Shaoping, Wu Jing. Analytical methods for the whole prestressing process of arch-suspended prestressed space grids [J]. Engineering Mechanics, 2007, 24(12): 93-99 (in Chinese)).
- [8] 汪树玉. 优化原理、方法与工程应用[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1991.